Variable Compleja I, Curso 2016-17

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 6 de problemas

Teorema de la aplicación abierta. Principio del módulo máximo. Lema de Schwarz

1) Sea f una función holomorfa en un dominio Ω simplemente conexo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y con valores en ese mismo dominio. Supongamos que en Ω hay dos puntos a, b, $a \neq b$ tales que $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Pruebe que entonces f es la función identidad.

Ayuda: Pase a $\mathbb{D}$.

2) Sea $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ una función holomorfa no constante. Pruebe que:

a) $\dfrac{|f(0)| - |z|}{1 + |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \dfrac{|f(0)| + |z|}{1 - |f(0)||z|}$, para todo $z \in \mathbb{D}$.

b) $|f'(w)| \leq \dfrac{1 - |f(w)|^2}{1 - |w|^2}$, $\forall w \in \mathbb{D}$.

Ayuda: Aplique el Lema de Schwarz a $\phi_a \circ f$ (1^{er} apartado) o a $\phi_b \circ f \circ \phi_a$ (2^{o} apartado) con un $a \in \mathbb{D}$ apropiado en cada caso, donde $\phi_a : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ es el automorfismo conforme del disco definido por $\phi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Conviene observar que $\phi_a \circ \phi_a$ es la identidad así que, por ejemplo, $f = \phi_a \circ (\phi_a \circ f)$.

3) Sea f una función holomorfa en el disco unidad, $\mathbb{D}$, tal que $\operatorname{Re} f(z) > 0$ para todo $z \in \mathbb{D}$ y, además, $f(0) = 1$. Usando una transformación de Möbius y el Lema de Schwarz, pruebe que:

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

para cada $z \in \mathbb{D}$.

Aplicaciones conformes

En los siguientes problemas denotaremos por $\mathbb{D}$ al disco unidad y por $\mathbb{H}$ al semiplano superior. Es decir, $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ y $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$.

4) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1}{z}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$.

5) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R}$; **b)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$; **c)** $\mathbb{D}$; **d)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \frac{1}{2}\}$; **e)** $\{z \in \mathbb{C} : |z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}\}$.

6) Halle una transformación de Möbius T tal que $T(i) = -i$, $T(0) = 0$ y $T(-1) = \infty$.

7) Halle una transformación de Möbius T tal que $T(\mathbb{D}) = \mathbb{H}$ y $T(0) = 3 + 2i$,

8) Encuentre una aplicación holomorfa y biyectiva de Ω_1 en Ω_2 en los siguientes casos:

a) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}\,,\ |z+1| < \sqrt{2}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{H}$.

b) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < 1\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$.

c) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1,\ |z - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}\}$ y $\Omega_2 = \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Re} z| < 1\}$.

d) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}\}$ y $\Omega_2 = \mathbb{D}$.

9) Sabiendo que toda aplicación holomorfa biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ es de la forma

$$f(z) = \lambda\,\frac{a-z}{1-\overline{a}z}\,, \qquad |a| < 1\,, \quad |\lambda| = 1\,,$$

describa todas las aplicaciones holomorfas biyectivas de $\mathbb{H}$ en $\mathbb{H}$.

10) Dadas dos circunferencias C_1 y C_2 con C_2 interior y tangente a C_1 (por ejemplo, $C_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z-2| = 2\}$ y $C_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| = 1\}$), demuestre que se puede colocar un número infinito de circunferencias C_n en la región comprendida entre C_2 y C_1 de tal manera que cada uno de ellas es tangente a C_1, C_2 y al siguiente.
Ayuda: Mediante una transformación de Möbius apropiada, transformar la región entre C_1 y C_2 en una región para la cual la solución sea sencilla.

11) Verificar que $k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ es una aplicación holomorfa y biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C} \setminus \Omega$ donde Ω es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z \leq -1/4,\ \operatorname{Im} z = 0\}$.
Ayuda: $k(z) = \frac{1}{4}\left(\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 - 1\right)$.

12) Sea Ω el abierto $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z-5| > 4\,,\ |z+5| > 4\}$. Encontrar una transformación de Möbius que lleve Ω sobre el conjunto $\{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < R\}$ para algún R, determinando exactamente R.

13) Supongamos que f una función holomorfa en el semiplano superior $\mathbb{H}$ y tal que toma valores en $\mathbb{H}$, $(f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H})$. Probar que si $z, w \in \mathbb{H}$ entonces

$$\left|\frac{f(z) - f(w)}{f(z) - \overline{f(w)}}\right| \leq \left|\frac{z-w}{z-\overline{w}}\right|$$

14) Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano complejo, $\Omega \neq \mathbb{C}$, y sea f una aplicación conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ sobre Ω. Sea ahora g una función holomorfa en $\mathbb{D}$ con valores en Ω y tal que $g(0) = f(0)$. Probar que

$$\max_{|z| \leq r} \{|g(z)|\} \leq \max_{|z| \leq r} \{|f(z)|\}$$

para cada r, $0 \leq r < 1$.
Ayuda: Considerar la función $f^{-1} \circ g$.

15) Describa la imagen mediante la transformación $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ de los siguientes conjuntos:

a) $\mathbb{R}$; **b)** $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 2\}$; **c)** $\mathbb{D}$; **d)** $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$.

16) Encuentre una transformación de Möbius T tal que $T(\{z \in \mathbb{C} : \ \operatorname{Re} z > 0,\ |z-1| > 1/2\})$ es de la forma $\{w \in \mathbb{C} : \ 1 < |w| < h\}$, calculando el valor exacto de h.

17) Hallar dos transformación de Möbius T_1 y T_2 tales que $T_i(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ para $i = 1, 2$, y además verifiquen:

$$T_1(1/2) = 1/3, \qquad T_2(i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \qquad T_2(-i) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

18) Demostrar las siguientes afirmaciones:

a) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{C}$ con $|a| < 1$, la transformación de Möbius

$$T(z) = e^{i\alpha} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

envía $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$.

b) Toda aplicación holomorfa y biyectiva de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ que fija el origen es una rotación.
Ayuda: Usar el lema de Schwarz.

c) Toda aplicación holomorfa y biyectiva f de $\mathbb{D}$ en $\mathbb{D}$ es una de las aplicaciones descritas en el primer apaartado.
Ayuda: Componer f con una transformación de Möbius S apropiada y aplicar (ii) a $S \circ f$.