Variable Compleja I, Curso 2016-17

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 5 de problemas

1) a) Sea f una función entera tal que $|f(z)| \geq 1/(|z|^N + 1)$ para todo z. Demostrar que f es constante.

b) ¿Es cierta esta afirmación si se conoce que $|f(z)| \geq e^{-|z|}$ para todo z?

Teorema de unicidad (principio de los ceros aislados)

2) Sea $\mathbb{D}$ el disco unidad. Demuestre que no existe ninguna función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} = f\left(-\frac{1}{n}\right)$$

para $n = 2, 3, 4 \ldots$.

3) Halle razonadamente todas las funciones holomorfas en el disco $D(1;1) = \{z : |z-1| < 1\}$ y que allí satisfagan la condición

$$f\left(\frac{n}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}$$

4) Demuestre que si f es holomorfa en $\mathbb{D}$ y

$$\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2^n} \qquad \text{para} \qquad n \geq 2,$$

entonces f es idénticamente cero en $\mathbb{D}$.

Sugerencia: Como $f(0) = 0$, entonces $f(z) = z^k g(z)$ con $g(z)$ holomorfa en $\mathbb{D}$ y $g(0) \neq 0$. Compruebe que ésto es imposible.

5) Halle todas las funciones enteras tales que

a) $f(z) = f(z^2)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

b) $f(2z) = 2f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

6) Halle todas las funciones holomorfas en el disco unidad $\mathbb{D}$ que satisfacen

$$f(z^2) = f(z) + z, \text{ y } f(0) = 0 \qquad (*)$$

Compruebe que no existe ninguna función entera que satisfaga (*).

7) * Sea α un número irracional y $q = e^{2\pi i\alpha}$. Demuéstrese que las únicas soluciones holomorfas de la ecuación funcional $f(z) = f(qz)$ en la corona $\Omega = \{\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$ son las funciones constantes.

8) * Demuestre que si f es holomorfa en el disco unidad y $|f(z)| \leq 1 - |z|$ allí, entonces $f \equiv 0$. ¿Puede una función holomorfa satisfacer $|f(z)| \geq 1/(1 - |z|)$ para $|z| < 1$?

Principio del argumento. Teorema de Rouché

9) ¿Cuántos ceros tiene la ecuación $e^z - 4z^n + 1 = 0$ en el disco unidad?

10) Halle el número de ceros de la función holomorfa

$$f(z) = z^4 - 12z^2 + 15z + i$$

(a) en el disco unidad; (b) en la corona $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 2\}$; (c) en el resto del plano.

11) ¿Cuántos ceros tiene en el disco $\{z : \ |z| < R\}$ la ecuación $e^z = az^n$ con $|a| > e^R/R^n$?

12) Encuentre razonadamente todos los polinomios mónicos:

$$p(z) = z^n + a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_1\, z + a_0$$

para los cuales $|p(z)| < 1$ para todo z en la circunferencia unidad.

13) Demuestre que el polinomio $p(z) = z^4 + iz + 1$ tiene exactamente dos ceros:

a) en el semiplano superior $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$;
b) en el semiplano derecho $D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$.

14)* Pruebe que la ecuación $z = \lambda - e^{-z}$, con λ real y $\lambda > 1$, tiene en $\{z : \operatorname{Re}\ z > 0\}$ una única raiz y, además, ésta es real.

15) Halle el número de ceros del polinomio

$$p(z) = z^3 - 7z^2 + 2z - 3$$

en la corona $\{z \in \mathbb{C} : \ 1 < |z| < 10\}$.

Teorema de la aplicación abierta. Principio del módulo máximo. Lema de Schwarz

16) Determine razonadamente todas las funciones f, holomorfas en el disco unidad, tales que $\operatorname{Re} f(z) \cdot \operatorname{Im} f(z) = 0$ para todo z en el disco.

17) Sea Ω un dominio acotado en $\mathbb{C}$ y f, g funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $|f(z)| = |g(z)|$ en $\partial\Omega$ y $f(z)g(z) \neq 0$ en $\overline{\Omega}$, entonces $f(z) = cg(z)$ con $|c| = 1$.

b) Si Re f = Re g en $\partial\Omega$, entonces $f = g + i\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

18) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ y γ una curva simple y cerrada, C^1 a trozos, contenida en Ω junto con su dominio interior. Si f es holomorfa en Ω y $|f| \equiv 1$ en la curva γ, demuestre que entonces o bien f tiene algún cero en el interior de γ, o bien f es constante en Ω.

Ayuda: Aplique el Principio del módulo máximo a la función $1/f$.