# Variable Compleja I, Curso 2016-17

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

## Hoja 4 de problemas

### Teorema de Liouville. Estimaciones de Cauchy

**1)** Determine razonadamente todas las funciones enteras $f$ (holomorfas en $\mathbb{C}$) tales que

$$|f(z)| \leq \frac{2017\,|z|^2}{|z|^2+1}\,, \quad |z| \geq 1\,.$$

**2)** Supongamos que $f$ es entera. Demuestre las siguientes afirmaciones:

**a)** Si $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$ entonces $f$ es constante.

**b)** Si existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M|z|^2$ para todo $z \in \mathbb{C}$ entonces $f$ es un polinomio de grado $\leq 2$ (de hecho un múltiplo de $z^2$).
**Ayuda:** Conviene usar las estimaciones integrales de Cauchy.

**3)** Si $f$ es entera y cumple

$$|f(z)| \leq \pi e^{2\,\mathrm{Re}\,z}$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, demuestre que existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $f(z) = ae^{2z}$.

**4)** Demuestre que si una función entera $f$ satisface

$$f(z+1) = f(z)$$
$$f(z+i) = f(z)$$

para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ es una función constante.

**Sugerencia**: Use el teorema de Liouville.

**5)** Demuestre las siguientes afirmaciones.

**a)** Si $f$ es entera y $|f(z)| \geq 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ es constante.

**b)** Análogamente, si para algún $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ se tiene $|f(z)-a| \geq r$, para todo $z \in \mathbb{C}$, entonces $f$ es constante.
**Sugerencia**: Considere la función $g(z) = \frac{1}{f(z)-a}$ y aplique el teorema de Liouville.

**c)** Concluya que si $f$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y no constante, entonces, $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

**6)** Probar que si $f$ es holomorfa en un dominio $\Omega$ y si $z \in \Omega$, entonces no se puede cumplir

$$|f^{(n)}(z)| > n!n^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Teorema de Morera

**7)** La función $g$ viene dada por $g(z) = \int_0^\pi \cos(z+t^2)\,dt$, para $z \in \mathbb{C}$. Demuéstrese que $g$ es entera.

*Observación.* El teorema de Morera nos permite demostrar que funciones definidas como integrales de cierto tipo son también holomorfas, lo cual nos proporciona más ejemplos aparte de las fórmula explícitas y series de potencias.

**8)** $^*$ Sea $f$ una función continua en el plano complejo $\mathbb{C}$ y holomorfa en el plano menos un segmento $[a, b]$ del eje real. Utilizando el teorema de Morera, demuestre que $f$ es entera.

### Singularidades aisladas. Series de Laurent

**9)** Clasifique las singularidades de las siguientes funciones por su tipo y calcule los residuos correspondientes:

$$\textbf{a)}\ \frac{1}{z^2+2z+1}\,; \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{z^3-1}\,; \qquad \textbf{c)}\ \frac{\cos z - 1}{z^2}\,; \qquad \textbf{d)}\ \frac{z^2}{\operatorname{sen} z}\,; \qquad \textbf{e)}\ \operatorname{sen}\frac{1}{z^2}\,.$$

**10)** Halle los desarrollos de Laurent de las siguientes funciones en las coronas indicadas:

$$\textbf{a)}\ \cos\frac{1}{z}\,,\quad 0<|z|<+\infty\,, \qquad \textbf{b)}\ \frac{1}{z^2+4z+3}\,,\quad 1<|z|<3\,; \qquad \textbf{c)}\ z^2 e^{\frac{1}{1-z}}\,,\quad 0<|z-1|<+\infty\,.$$

**11)** Sean $f$ y $g$ dos funciones holomorfas en $D(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$. Demuestre que si $f$ tiene un cero de orden $n$ y $g$ tiene un cero de orden $n + 1$ en el punto $a$, entonces $f/g$ tiene un polo simple en $a$. Calcule el residuo.

### Teorema de los residuos. Cálculo de algunas integrales impropias

**12)** Calcule las siguientes integrales: (i) $\displaystyle\int_{|z|=r} \frac{dz}{z^2-z+1}$, $r \neq 1$; (ii) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{1+z}{1-\cos z} dz$.

**13)** Evalúe la integral $\int_\gamma z^n e^{1/z} dz$, donde $n \in \mathbb{N}$ y $\gamma$ es una circunferencia (orientada positivamente) que rodea al origen.

**14)** Demuestre razonadamente que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{a+\operatorname{sen}^2\theta} = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2+a}}$, donde $a > 0$.

**15)** Demuestre las siguientes igualdades utilizando el teorema de los residuos (con una elección adecuada del camino):

$$\text{(a)}\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \text{(b)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\, dx = \pi\,.$$

**16)** Sea $R > 3$ y $\gamma_R$ la semicircunferencia centrada en el origen y situada en el semiplano inferior, desde $-R$ hasta $R$.

**a)** Obtenga una estimación para la integral $J_R = \displaystyle\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z^2+9i}$ y luego deduzca que $\lim_{R\to+\infty} J_R = 0$.

**b)** Añada el intervalo desde $R$ hasta $-R$ para cerrar la curva y utilice el apartado anterior y el teorema de los residuos (o la fórmula integral de Cauchy) para calcular las siguientes integrales impropias:

$$(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{x^4+81} = \frac{\pi\sqrt{2}}{6}\,, \qquad (\mathbf{b}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+81}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{54}\,.$$

**17)** Calcule las siguientes integrales:

$$(\mathbf{a}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sen} x\,dx}{(x-1)^2+1}\,, \qquad (\mathbf{b}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos \pi x}{4x^2-1}\,dx\,.$$

**18)** Calcule la integral impropia

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^3}$$

integrando a lo largo de un sector circular centrado en el origen, de radio $R > 1$ y de apertura $(2\pi)/3$.

**19)** $^*$ Compruebe las siguientes igualdades para $|p| < 1$, $q > 0$:

$$(\mathbf{a}) \int_0^{\infty} \frac{x^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi p}{2}\right)^{-1}, \qquad (\mathbf{b}) \int_0^{\infty} \frac{x^p}{(x+q)^2}\,dx = \frac{\pi p\, q^{p-1}}{\operatorname{sen} \pi p}\,.$$

**20)** $^*$ Demuestre que cada una de las *integrales de Fresnel*:

$$\int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx\,, \qquad \int_0^{\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$$

tiene valor $\sqrt{2\pi}/4$, integrando la función $e^{iz^2}$ sobre el contorno $\gamma$ compuesto por el segmento $[0, R]$, el arco circular desde $R$ hasta $Re^{\pi i/4}$ y el segmento desde $Re^{\pi i/4}$ hasta el origen y utilizando el teorema de Cauchy.
**Ayuda**: para acotar la integral sobre el arco, es conveniente usar la *desigualdad de Jordan* vista en Cálculo I: $\operatorname{sen} t \geq (2t)/\pi$, para $0 \leq t \leq \pi/2$. ¿Cuál es la interpretación geométrica de esa desigualdad? (Observe la gráfica de la función seno.)