Variable Compleja I,   Curso 2016-17

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 3 de problemas

Integración compleja: propiedades y estimaciones básicas

1) Calcule $\int_\gamma |z|\overline{z}\,dz$, donde γ es el camino cerrado compuesto por la semicircunferencia superior de $|z|=1$ y el segmento $-1 \le x \le 1\,;\ y=0$, con orientación positiva.

2) ¿Es cierto que $\mathrm{Re}\{\int_\gamma f(z)dz\} = \int_\gamma \mathrm{Re}\{f(z)\}dz$ para cualquier f, función continua con valores complejos? Razone la respuesta.

3) Calcule $\int_\gamma \frac{z}{\overline{z}}\,dz$, donde γ es el camino que va de -3 a -1 a lo largo del eje real, después va de -1 a 1 siguiendo la semicircunferencia superior del círculo unidad, luego va de 1 a 3 de nuevo a lo largo del eje real, y regresa a -3 por la semicircunferencia superior del círculo $|z|=3$.

4) Demuestre que si $|a|<R$, entonces

$$\int_{|z|=R} \frac{|dz|}{|z-a||z+a|} \le \frac{2\pi R}{R^2-|a|^2}\,.$$

5) Sea γ el cuadrado en $\mathbb{C}$ con vértices $\pm 1 \pm i$. Acote el valor absoluto de las siguientes integrales:

$$\text{(i)}\ \int_{|z|=1} \frac{dz}{2-z^3}, \qquad \text{(ii)}\ \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2}\,dz, \qquad \text{(iii)}\ \int_\gamma (\cos\, z)^2\,dz.$$

6) Sea γ el arco del círculo $|z|=2$ comprendido en el primer cuadrante. Verifique la estimación

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}\right| \le \frac{\pi}{3}.$$

Teorema de Green en forma compleja

7) Sea $P(z)$ un polinomio y sea γ el círculo $\{z\in\mathbb{C} : |z|=R\}$ orientado positivamente. Pruebe que

$$\int_\gamma \overline{P(z)}\,dz = 2\pi i R^2\,\overline{P'(0)}\,.$$

8) Sea γ un camino simple y cerrado que encierra un área S. Demuestre que

$$S = \frac{1}{i}\int_\gamma x\,dz = -\int_\gamma y\,dz = \frac{1}{2i}\int_\gamma \overline{z}\,dz\,.$$

9) Sea γ un camino cerrado simple en $\mathbb{D}$, y f una función holomorfa en $\mathbb{D}$ e inyectiva. Demuestre que $\int_\gamma \overline{f(z)}f'(z)\,dz$ es un número imaginario puro.

Ayuda: Escriba $f=u+iv$ y use un cálculo directo (largo) con la fórmula de Green, o bien aplique un cambio de variables adecuado y relacione la integral con un área.

Teorema y fórmula integral de Cauchy y algunas de sus aplicaciones

10) Calcule las siguientes integrales, justificando las respuestas:

$$\textbf{a)} \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+3i}\,, \qquad \textbf{b)} \int_{|z-1|=2} \frac{dz}{z^2+16}\,, \qquad \textbf{c)} \int_{|z|=1} \frac{z^2 \operatorname{sen} z\, dz}{(z+a)^3}\,, \quad |a| \neq 1\,.$$

11) Sea γ la circunferencia unidad orientada positivamente. Calcule las siguientes integrales:

$$\text{(i)} \int_\gamma z \operatorname{sen} z^2\, dz\,, \quad \text{(ii)} \int_\gamma \frac{\operatorname{sen} z}{z}\, dz\,, \quad \text{(iii)} \int_\gamma \frac{1-\cos z}{z^2}\, dz\,, \quad \text{(iv)} \int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\, dz\,, \quad \text{(v)} \int_\gamma \frac{2}{1-4z^2}\, dz\,.$$

12) Calcule las siguientes integrales trigonométricas usando la integración sobre la circunferencia unidad y la fórmula integral de Cauchy:

$$\textbf{a)} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos t}\, dt\,, \qquad \textbf{b)} \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2t)}{5-4\operatorname{sen} t} dt\,, \qquad \textbf{c)} \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\operatorname{sen} t)\, dt\,.$$

13) * Calcule la integral $\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} d\theta$. ¿Cuál es el límite $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} d\theta$?
Sugerencia: Calcule la integral de línea $\int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^{2n} \frac{dz}{z}$ usando el desarrollo binomial.

14) Sea Ω un dominio en $\mathbb{C}$ con la frontera $\partial\Omega$ y f una función holomorfa en Ω tal que, para un cierto $M > 0$, se tiene $|f(z)| \leq M$ para todo $z \in \Omega$. Pruebe que

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{\text{distancia}(z, \partial\Omega)}\,.$$

Sugerencia: Sea $r < \text{distancia}(z, \partial\Omega)$. Use la fórmula integral de Cauchy en $D(z; r)$.

15) Demuestre que si f es holomorfa en un abierto que contiene al disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| \leq 1\}$ y si $f(z) = 0$ cuando $|z| = 1$, entonces $f(z) = 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$.
Ayuda: Fórmula integral de Cauchy.

16) Demuestre que si $a, b \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ es tal que $|a| < R$, $|b| < R$, entonces

$$\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\, dz = \frac{f(a) - f(b)}{a-b}\,.$$

Luego use esta fórmula para probar el Teorema de Liouville: *toda función entera y acotada es constante*. (**Ayuda:** Use fracciones simples y después haga que $R \to +\infty$.)

17) * Sea f una función holomorfa en $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R_0\}$. Demuestre las siguientes fórmulas:
a) Si γ es la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$ con $R < R_0$ y $|w| < R$, entonces

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{R^2 - |w|^2}{(z-w)(R^2 - z\overline{w})}\, f(z)\, dz\,.$$

b) Si $0 \leq r < R < R_0$, entonces

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \psi) + r^2}\, f(Re^{i\psi}) d\psi\,.$$