Variable Compleja I, Curso 2016-17

(3º de Grado en Matemáticas y 4º de Doble Grado en Ing. Informática y Matemáticas)

Hoja 2 de problemas

Topología del plano y del plano extendido. La esfera de Riemann. Límites y continuidad.

Esfera de Riemann. Se considera $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y se definen los entornos de ∞ como aquellos que contienen un conjunto de la forma $\{z \in \mathbb{C} : |z| > R\}$ para algún $R > 0$.
Con estos entornos, $z_n \to \infty$ quiere decir que $\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$, es decir:

Para todo $R > 0$ existe N tal que $|z_n| > R$ para todo $n > N$.

Igualmente, $\lim_{z\to\infty} f(z) = a$ quiere decir:

Para todo $\epsilon > 0$ existe $R > 0$ tal que para todo z con $|z| > R$ se tiene $|f(z) - a| < \epsilon$.

De manera similar se definen $\lim_{z\to b} f(z) = \infty$ y $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

1) Decida si las sucesiones $z_n = \left(\frac{1-2i}{3}\right)^n$, $w_n = \left(\frac{3-4i}{5}\right)^n$ tienen límite (finito) o no.

2) Si $|z| > 1$, demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{z^n}{n} = \infty$.

3) Decida razonadamente si las siguientes funciones tienen límite finito o no en el punto indicado:

a) $f(z) = \dfrac{|z|^2}{z} + 2\,\mathrm{Im}\, z$ (para $z \neq 0$) en $z = 0$; **b)** $f(z) = \dfrac{z^3 - 8i}{z + 2i}$ (para $z \neq -2i$) en $z = -2i$.

4) Demuestre las siguientes afirmaciones.

a) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $n \geq 1$ y $a_n \neq 0$, entonces $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

b) Si $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_0$ y $Q(z) = b_m z^m + \cdots + b_0$ son polinomios con $a_n \neq 0 \neq b_m$, entonces se tiene

$$\lim_{z\to\infty} \frac{P(z)}{Q(z)} = \begin{cases} 0, & \text{si } n < m \\ \dfrac{a_n}{b_m}, & \text{si } n = m \\ \infty, & \text{si } n > m\,. \end{cases}$$

5) Halle los puntos de continuidad de las siguientes funciones:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{z^4 - 1}{z - i} & \text{si } z \neq i \\ 4i & \text{si } z = i, \end{cases} \qquad g(z) = \begin{cases} z & \text{si } |z| \leq 1 \\ |z|^2 & \text{si } |z| > 1. \end{cases}$$

6) No existe $\lim_{z\to\infty} e^{-z}$.

Funciones holomorfas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann

7) ¿En qué puntos del plano son derivables las siguientes funciones?

a) $f(x,y) = x^2 - y^2 + ixy$; **b)** $f(z) = |z|^4$; **c)** $f(z) = e^x \cos y - ie^x \operatorname{sen} y$; **d)** $\cos \overline{z}$.

8) Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ y g una función holomorfa en Ω. ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones? Razone la respuesta.

a) $f(z) = g(\overline{z})$; **b)** $f(z) = \overline{g(z)}$; **c)** $f(z) = \overline{g(\overline{z})}$; **d)** $f(z) = |g(z)|$.

Ayuda: en todos los apartados basta con usar la definición de derivada.

9) ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones? ¿Cuál es su derivada?

a) $\dfrac{1}{(z-1/z)^2}$, **b)** $\dfrac{1}{(z-1)(z^2-2)}$, **c)** e^{e^z}, **d)** $\operatorname{sen}(e^z)$, **e)** $e^{z+1/z}$, **f)** $\dfrac{1}{e^z-1}$.

10) Sea f una función holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Demuestre que si $|f|$ es constante en Ω, entonces f es constante.

11)* Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si h es una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ y f es holomorfa, entonces $\Delta(h \circ f) = (\Delta h \circ f)|f'|^2$.

b) Si f es holomorfa en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $f(z) \neq 0$ $\forall z \in \Omega$, entonces

$$\Delta(|f|) = \frac{|f'|^2}{|f|}.$$

c) Si f, g son holomorfas en un dominio Ω, y si $|f| + |g|$ es constante en Ω y f y g no se anulan en Ω, entonces f y g son constantes.

Funciones exponenciales y trigonométricas. Raíces, logaritmos y potencias complejas

12) Demuestre que $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

13) Demuestre que: **a)** $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1$, **b)** $\cos(2z) = \cos^2 z - \operatorname{sen}^2 z$.

14) Resuelva las siguientes ecuaciones: **a)** $\cos z = 2$; **b)** $\operatorname{sen} z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

15) Calcule los siguientes valores:

a) $(1-i)^i$, 2^{-1+i}, $i^{\sqrt{2}}$, tomando la rama principal del logaritmo.

b) i^{-i}, $\log 3$, $\log(\sqrt{3}+i)$, $(1+i)^{1+i}$, $2^{\pi i}$ (calcule todos los posibles valores).

16) ¿Dónde son holomorfas las siguientes funciones y cuál es su derivada?

a) $\log(e^z+1)$, **b)** $\sqrt{e^z+1}$, **c)** $\operatorname{sen}\sqrt{z}$, **d)** z^{2z}.

(**Nota**: hay que elegir una rama del argumento.)

Series de potencias

17) Halle el radio de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\sum_{n=1}^{\infty} n^4 z^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$, **c)** $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n^2} z^n$, **d)** $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$, **e)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{1+2^n}$,

f) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+a^n) z^n$, **g)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$, **h)** $\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$, **i)** $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2} z^{1+2+\cdots+n}$, **j)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! \frac{z^n}{n^n}$,

18) Pruebe que para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < 1$, se verifican las identidades:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad \text{y} \qquad \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1}.$$

19) Desarrolle las siguientes funciones en series potencias del tipo indicado:

a) $\dfrac{z}{z^2-5z+6}$ y $\dfrac{z}{(z-1)^2}$ en potencias de z; **b)** $\dfrac{2z+3}{(z+1)^2}$ en potencias de $z-1$.

20) Calcule el radio de convergencia y la suma de: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{n!}$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(n-1)z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{(z-2\pi i)^n}{n!}$.

21) Si $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, ¿qué representan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 a_n z^n$ en términos de f?

22) ¿Para qué valores de z convergen las siguientes series?

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$, **b)** $\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nz}$, **c)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{n^2}$, **d)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(nz)}{2^n}$, **e)** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{1+z^{2n}}$.

23) Desarrolle en series de potencias (centradas en el origen) las siguientes funciones elementales:

$$(1-z)\cos z\,, \qquad z^3\log(1-z)\,, \qquad \frac{e^{-z}}{1+z}\,, \qquad e^{2z^3}\,, \qquad \frac{\operatorname{sen} z}{1-z^2}\,,$$

indicando en cada caso el radio de convergencia.

24) Escriba explícitamente la función cuya serie de potencias es $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$. Luego calcule la suma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!}$.

(**Ayuda:** Evalúe la función exponencial en los puntos $\pm z$ y $\pm iz$.)

25) (Teorema del binomio para exponentes reales.) Sea α un número real con $\alpha \notin \mathbb{N}$ y definamos

$$\binom{\alpha}{0} = 1\,, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha\,, \quad \binom{\alpha}{j} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!} \quad \text{si } j > 1\,.$$

a) Demuestre que el radio de convergencia de la serie $F(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ es 1.

b) Compruebe que $(1+z)F'(z) = \alpha F(z)$.

c) Concluya que $F(z) = (1+z)^\alpha$, es decir, $(1+z)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} z^k$ si $|z| < 1$.

(Aquí se toma la rama principal de w^α.)

26) Se considera la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ para $z \in \mathbb{C}$.

a) Demuestre que la serie converge si $\operatorname{Re} z > 1$.

b) Demuestre que si a es un número real con $a > 1$ entonces la serie converge uniformemente en $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$.

Nota: $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^z}$ es la *función Zeta de Riemann.*

27) Supongamos que la serie de potencias $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ tiene radio de convergencia $R = 1$ y que $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 0$. Denotemos

$$s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \qquad \text{y} \qquad s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

a) Demuestre que $s_n(z) = (1-z)\sum\limits_{k=0}^{n-1} s_k z^k + s_n z^n$ y concluya que $f(z) = (1-z)\sum\limits_{n=0}^{\infty} s_n z^n$.

b) Demuestre que $f(z) \to 0$ cuando z se aproxima a 1 de tal forma que $\dfrac{|1-z|}{1-|z|}$ está acotado.

28) Se consideran funciones $f_n(x) = \dfrac{nx}{\sqrt{1+n^2x^2}}$. Investigar si estas funciones:

a) tienen límite puntual en $\mathbb{R}$;

b) tienen límite uniforme en el intervalo $[1, +\infty)$;

c) tienen límite uniforme en el intervalo $[-1, 1]$.

Calcular la función límite en los casos cuando existe.

29) Se consideran funciones $f_n(x) = \dfrac{n^{4/3}x}{1+n^2x^2}$, $x \in [0, 1]$. Investigar si estas funciones:

a) tienen límite puntual en el intervalo $[0, 1]$;

b) tienen límite uniforme en el intervalo $[0, 1]$;

c) tienen límite uniforme en los intervalos $[\varepsilon, 1]$, donde $\varepsilon > 0$.

30) Sea g una función en $\mathbb{R}$ tal que $|g(x)| \leq C\sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Le asociamos la sucesión de funciones $f_n(x) = g(nx)/n$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Investigar si las funciones f_n tienen límite puntual en $\mathbb{R}$;

b) ¿En qué casos es uniforme la convergencia de estas funciones?

31) Dada una función diferenciable g en $\mathbb{R}$, ponemos ahora $h_n(x) = ng(x/n)$, $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostrar que las funciones h_n tienen límite puntual en $\mathbb{R}$;

b) ¿Cómo tiene que ser la función g para que el límite sea uniforme en $\mathbb{R}$?