**Variable Compleja I** **Curso 2016-17**

(3º de Matemáticas y 4º de Doble Grado)

Hoja 1 de problemas

**1)** Realice las operaciones indicadas:

**a)** $\frac{1}{i}+\frac{1}{1+i}$, **b)** $(i-\sqrt{2})^2$, **c)** $\frac{1}{(3+2i)^2}$, **d)** $(1+i\sqrt{3})^3$, **e)** $(\overline{1-i})^2+\overline{2+i}$, **f)** $|(2-i)(1+i)^4|$.

**2)** Calcule los valores de

**a)** $\sum_{k=1}^{2016} i^k$, **b)** $(1+i)^{14}$, **c)** $(1+i)^n+(1-i)^n$, **d)** $(\cos\frac{\pi}{12}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{12})^{20}$, **e)** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2016}$.

**3)** Calcule todos los valores de

**a)** $\sqrt[4]{-16}$, **b)** $(-\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{1/3}$, **c)** $\sqrt[4]{1-i}$, **d)** $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$.

**4)** Demuéstrese que $|z+w|^2 \le |z|^2+|w|^2+2|z\,w|$, para $z$, $w \in \mathbb{C}$ arbitrarios.

**5)** Sea $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Demuestre que $|x|+|y| \le \sqrt{2}|z|$, y que la igualdad se tiene si y sólo si $|x| = |y|$.
**Ayuda:** Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces $2ab \le a^2+b^2$ (con igualdad sólo si $a = b$).

**6)** Compruebe la identidad $|1+z\overline{w}|^2+|z-w|^2 = (1+|z|^2)(1+|w|^2)$, donde $z$, $w \in \mathbb{C}$.

**7)** Demuestre las siguientes afirmaciones:

**a)** Si $|z| = 1$, entonces para todos $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $\bar{b}z+\bar{a} \neq 0$ se cumple $\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right| = 1$.

**b)** Si $|a| < 1$, entonces $|z| < 1$ es equivalente a $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| < 1$.

**8)** Utilizando las fórmulas de Euler, demuestre que:

**a)** $\operatorname{sen}(3x) = 3\operatorname{sen}x - 4\operatorname{sen}^3 x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

**b)** La función $\cos(n\varphi)$ es un polinomio de grado $n$ de $\cos\varphi$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

**9)** Demuestre que $\left(\frac{1+i\,\tan\theta}{1-i\,\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\,\tan(n\theta)}{1-i\,\tan(n\theta)}$, para cualquier $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$.

**10)** Sin realizar cálculos, razónese que ninguno de los valores de $\sqrt[2017]{1+i}$ puede ser $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

**11)** Demuestre que si $w$ es una solución de $z^n = \mu$ (con $\mu \in \mathbb{C}$ fijo), entonces todas las soluciones son $w\omega_0, w\omega_1, w\omega_2, \ldots, w\omega_{n-1}$, donde $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$, son las raíces $n$-ésimas de la unidad. Después encuentre razonadamente las soluciones de $z^6-8=0$.

**12)** Demuestre las siguientes afirmaciones:

**a)** Si $z \neq 1$ entonces $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \dfrac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

**b)** Si $\omega \neq 1$ es una raíz $n$-ésima de la unidad, entonces

$$1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^n = 0\,, \qquad 1 + 2\omega + 3\omega^2 + \cdots + n\omega^{n-1} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

**c)** Si $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} \neq 0$, entonces

$$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})\theta}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\right),$$

y

$$\operatorname{sen}\theta + \operatorname{sen} 2\theta + \cdots + \operatorname{sen} n\theta = \frac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2}\theta)\operatorname{sen}(\frac{n}{2}\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$$

**Ayuda:** Use el apartado a) con $z = e^{i\theta}$.

**13)** Demuestre que las soluciones en $\mathbb{C}$ de la ecuación $az^2 + bz + c = 0$ , con $a \neq 0$, son

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

donde $\sqrt{b^2 - 4ac}$ significa uno de los dos valores de esta raiz cuadrada.

**14)** Demuestre las siguientes desigualdades partiendo de consideraciones geométricas

**a)** $\left|\dfrac{z}{|z|} - 1\right| \leq |\operatorname{Arg} z|\,,$ **b)** $|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z||\operatorname{Arg} z|$.

**15)** Resuelva las siguientes ecuaciones (donde $z \in \mathbb{C}$):

**a)** $(z + 1)^4 + i = 0$; **b)** $\operatorname{Re}(z^2 + 5) = 0$; **c)** $\operatorname{Re}(z + 5) = \operatorname{Im}(z - i)$.

**16)** Describa el conjunto del plano complejo determinado por las siguientes relaciones:

**a)** $|z - 2| - |z + 2| > 3$, **b)** $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 1$, **c)** $|z^2 - 1| < 1$, **d)** $\operatorname{Im} \dfrac{1}{z + i} = 0$.

**17)** Dibuje el conjunto de puntos $z \in \mathbb{C}$ que satisfacen

**a)** $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z}{1 + i}\right) = 0$; **b)** $\left|z^2 - 4z + 4\right| = 4$.

**18)** Describa geométricamente el conjunto de los puntos $w \in \mathbb{C}$ que tienen la forma $w = iz^2 + 1$, para $z = x + iy$ con $x > 0$, $y > 0$, $x^2 + y^2 < 1$.

**19)** Halle razonadamente el supremo y el ínfimo del siguiente conjunto de números reales (y explique, en ambos casos, si se alcanzan el máximo y/o el mínimo):

**a)** $\{|z^{12} - a| : \ z \in \mathbb{C}\,, |z| \leq 1\}$, donde $a \in \mathbb{C}$ es un número fijo.

**b)** $\left\{\operatorname{Re}(iz^4 + 1) : \ |z| < \sqrt{2}\right\}$.

**20)** *

**a)** Sean $z_1, z_2, z_3$ y $w_1, w_2, w_3$ dos ternas de números complejos distintos. Sean $T$ y $S$ los triángulos cuyos vértices son, en ése orden, $z_1, z_2, z_3$ y $w_1, w_2, w_3$ respectivamente. Pruebe que $T$ y $S$ son semejantes si y sólo si

$$\frac{z_1 - z_2}{w_1 - w_2} = \frac{z_2 - z_3}{w_2 - w_3} = \frac{z_3 - z_1}{w_3 - w_1}.$$

y que esta condición puede escribirse también del siguiente modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**b)** La condición necesaria y suficiente para que $\{z_1, z_2, z_3\}$ sean los vértices de un triángulo equilátero es que

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

**Ayuda:** Considere el triángulo $\{z_2, z_3, z_1\}$.

**21)** Resolver las ecuaciones: **a)** $z^2 = 3 + 4i$; **b)** $z^2 = 2 - i$.

**22)** Resolver las ecuaciones: **a)** $z^2 - (3 + i)z + 4 + 3i = 0$; **b)** $z^2 + 5iz - 5 - 3i = 0$.