VARIABLE COMPLEJA I

(Grado en Matemáticas y de Doble Titulación 2017-18)

Examen Extraordinario, 12 de Junio de 2017

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: ____

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: ___________________________ FIRMA: __________________

---

1. (a) Sea $\mathbb{A} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$ y sea $\{g_k(z)\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones holomorfas en $\mathbb{A}$ tal que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_k(z)$ converge uniformemente en $\mathbb{A}_\delta = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 1 + \delta\}$ para todo $\delta > 0$. Formular el enunciado del teorema de Morera y utilizarlo para demostrar que $g(z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g_k(z)$ es holomorfa en $\mathbb{A}$.

(b) Utilizar el resultado del apartado (a) para demostrar que la función zeta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$

es holomorfa en el semiplano $\mathbb{A}$.

---

2. Sea

$$\varphi(z) = \frac{1}{(z-4)(z-6)^2}\,.$$

Encontrar el desarrollo de Laurent de la función $\varphi(z)$ en el anillo $\{z \in \mathbb{C} :\, 4 < |z| < 6\}$.

3. Calcular la integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{4 + \operatorname{sen} t}\, dt.$

4. Sea $f(z)$ una función entera tal que

$$|f(z)| \leq e^{x^2-y^2}, \quad \text{para todo } z = x+iy, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Demostrar que $f(z) = c\,e^{z^2}$, donde $c \in \mathbb{C}$ es una constante.