VARIABLE COMPLEJA I

(Grado en Matemáticas y de Doble Titulación 2017-18)

Examen final, mayo de 2017

P. 1	P. 2	P. 3	P. 4	TOTAL

Inicial del primer apellido: ________

NOMBRE: __________________________

APELLIDOS: ____

D.N.I. O PASAPORTE: _______________________________

FIRMA: ____

1. (a) Sea f una función holomorfa en el disco $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ tal que $|f(z)| \leq 1$ para todo $z \in D$. Demostrar que $|f^{(n)}(0)| \leq n!$ para $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sea $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$, donde $a_n \in \mathbb{C}, |a_n| \leq n!$. Demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge uniformemente en cualquier disco $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}, 0 < r < 1$.
¿Se puede afirmar que $|g(z)| \leq 1$ en el disco D?

2. Sea

$$\varphi(z) = \frac{z-5}{z+5}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

a) Encontrar las soluciones z_1 y z_2 de la ecuación $\varphi(z) = z$.
b) Sea Γ la circunferencia que pasa por los puntos z_1, z_2 y cuyo centro es $z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Encontrar la imagen $\varphi(\Gamma)$.

3. Hallar

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+5}{(x^2+3)(x^4+1)}\,dx.$$

4. Demostrar que la ecuación $2z^7 + 16z - 3 = 0$ tiene exactamente seis soluciones en el conjunto $E = \{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2\}$.