

# Memoria del curso “Análisis complejo”

Dmitry V. Yakubovich



# Índice

0. Sobre esta memoria (introducción para el profesor) .....	1
---	---

<b>La distribución del temario por horas</b> .....	8
--	---

**Capítulo I.** Propiedades elementales de los números complejos. La definición de función holomorfa.

1. Introducción. Funciones analíticas de la variable real y de la variable compleja .....	11
2. Historia de análisis complejo .....	14
3. Propiedades elementales de números complejos .....	15
4. Raíces cuadradas .....	20
5. Ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos .....	22
6. Ejemplos de funciones analíticas en el plano complejo: funciones exponenciales y trigonométricas .....	22
7. La definición de función holomorfa .....	25
8. Logaritmos de números complejos. Ramas del argumento y ramas del logaritmo .....	31
9. Ramas de raíces .....	33
10. Funciones armónicas .....	33
11. Sucesiones y series con términos complejos .....	35
12. La esfera de Riemann y la proyección estereográfica .....	37
13. Un repaso de la convergencia uniforme .....	39
14. Series de potencias .....	40
15. Funciones elementales .....	41

**Capítulo II.** Aspectos geométricos: transformaciones conformes.

16. El número de rotación de una curva .....	43
17. El Teorema de Jordan .....	45
18. La relación entre la existencia de las ramas del logaritmo en un dominio y su topología .....	46
19. Propiedades generales de transformaciones conformes. Transformaciones de Möbius. ....	47
20. Un breve recordatorio sobre las curvas de segundo orden en el plano	55
21. La función potencia como transformación conforme .....	57
22. Las funciones cuadrado y raíz cuadrada y dominios con fronteras	

parabólicas e hiperbólicas .....	57
23. Las transformaciones de Riemann para dominios de forma “lunar” .....	58
24. La función de Joukowski .....	59
25. Las ramas de la inversa a la función de Joukowski .....	62
26. Dominios con cortes .....	64

**Capítulo III.** Integración. Series de potencias.

27. Repaso de las integrales de línea en $\mathbf{R}^n$ .....	66
28. Las integrales complejas de línea .....	69
29. La fórmula de Green y el teorema de Cauchy .....	72
30. El teorema de los residuos. La fórmula de Cauchy .....	75
31. La integral y la primitiva .....	79
32. Las series de potencias como funciones holomorfas .....	84
33. El desarrollo de funciones holomorfas en series de potencias .....	85
34. La función arcotangente .....	89

**Capítulo IV.** Series de Laurent y residuos.

35. Series de Laurent .....	91
36. Tipos de singularidades aisladas de funciones holomorfas .....	93
37. El orden de cero y el orden del polo.....	95
38. Fórmulas de cálculo de residuos .....	97
39. Cálculo de integrales definidas con métodos de variable compleja ...	98

**Capítulo V.** Propiedades globales de funciones holomorfas.

40. Ceros de funciones holomorfas. Teorema de continuación única ....	100
41. Funciones meromorfas en un dominio .....	101
42. Teorema de Liouville. Teorema fundamental del Álgebra .....	102
43. Propiedades locales de las funciones holomorfas. Principio del módulo máximo .....	103
44. Lema de Schwartz .....	105
45. Principio del argumento. Teorema de Rouché .....	105

<b>Bibliografía</b> .....	110
---------------------------	-----

<b>Apéndice I</b> La demostración del Teorema de Jordan para curvas diferenciables a trozos. Comentarios sobre la fórmula de Green .....	112
---	-----

<b>Apéndice II</b> sobre el uso del paquete “Transformaciones conformes” .....	118
---	-----

## 0. Sobre esta memoria (introducción para el profesor)

La asignatura de Variable Compleja es una de las materias en las que más puede el estudiante apreciar la belleza de las Matemáticas y la fortaleza del razonamiento lógico.

Estos apuntes pretenden desarrollar la asignatura conforme al programa del Departamento de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid. El autor impartió estas clases en los años académicos 2003/04 y 2004/05. Anteriormente ha impartido un curso parecido en la Universidad Estatal de San Petersburgo (también dos veces).

El programa de la licenciatura de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Madrid incluye el curso troncal “Variable Compleja I”, que se imparte en el tercer año de los estudios, y el curso optativo “Variable Compleja II”, que se imparte en el cuarto año. La presente memoria corresponde al curso cuatrimestral “Variable Compleja I”. Está pensada para servir de ayuda a los estudiantes.

### 0.1. Aspectos generales y dificultades de la asignatura

Cuando uno prepara este curso, se encuentra, con cierto asombro, con que la exposición rigurosa de la Variable Compleja no es una tarea fácil, que, además, se tiene que compaginar con otros objetivos muy deseables, tales como la transparencia y la brevedad de exposición de la teoría. Éstas son algunas de las dificultades:

1) El curso se apoya en algunos resultados de la Topología que no se han visto todavía (sobre todo, los relacionados con el Teorema de Jordan).

2) Las partes teóricas más importantes para la resolución de problemas son, en nuestra opinión, las series de Laurent y la fórmula de residuos. Sin embargo, estos temas aparecen sólo al final del curso, cuando ya escasea el tiempo.

3) Según nuestra experiencia, no todos los estudiantes manejan con destreza las propiedades elementales de números complejos (que en realidad, sólo se usan ocasionalmente en los cursos anteriores).

En el proceso de redacción de esta memoria hemos intentado tomar en cuenta estas dificultades.

### 0.2. Objetivos de la asignatura

Se plantean los siguientes objetivos concretos:

1. Que el alumno comprenda y adquiera soltura en el manejo de las propiedades elementales de números complejos, incluyendo raíces, logaritmos y la resolución de ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos.

2. Que tenga ideas claras, tanto geométricas como analíticas, de las nociones de función holomorfa y transformación conforme.

3. Que aprenda las transformaciones conformes estándar entre los dominios más simples en el plano complejo y sepa componerlas para resolver problemas.

4. Que aprenda las herramientas de las series de potencias y de las series de Laurent y sus usos en el cálculo de integrales definidas.

5. Que entienda el desarrollo lógico de la materia y se habitúe al uso del rigor. En particular, creemos que es necesario hacer énfasis en la noción de la convergencia uniforme y en la justificación del intercambio entre los signos de la suma infinita y de la integración. Los problemas que se presentan aquí pueden servir como motivación para el estudio del paso al límite bajo el signo de la integral, que se hace al mismo tiempo en el curso de la Teoría de la medida y la integral.

6. Que el alumno tenga una idea del desarrollo histórico de esta materia y de sus motivaciones, así como de sus aplicaciones modernas. (De hecho, la cantidad del tiempo disponible no permite profundizar sobre las aplicaciones. Se podría hacer mayor énfasis en ellas en Variable Compleja II).

7. Que el alumno asimile la gran diferencia que hay entre las propiedades de funciones diferenciables en el sentido real y de funciones holomorfas (nos referimos a que toda función derivable en el sentido complejo es infinitamente diferenciable, se desarrolla en una serie de potencias en cualquier punto de su definición, etc.)

8. Que el alumno se acostumbre al uso de la bibliografía.

### **0.3. Uso de programas informáticos en la enseñanza del tema “Transformaciones conformes”**

El autor de esta memoria ha desarrollado un paquete de programas denominado “Transformaciones conformes” usando **MatLab**. Este paquete sirve para visualizar transformaciones conformes definidas mediante fórmulas. Se ha utilizado con bastante éxito las dos veces que este programa fue impartido en la Universidad Autónoma de Madrid.

Incluimos una descripción de este programa y su uso en el Apéndice 2.

Se pueden contemplar dos posibles usos de este paquete:

**Primero**, el profesor puede utilizarlo con el proyector (“cañon”), conectado a un ordenador portátil. Según la experiencia, ésto ayuda a aumentar el

interés del estudiante. Es muy útil también en el primer momento cuando se dan las definiciones y se explican las propiedades geométricas de función holomorfa y de transformación conforme, incluso antes del estudio sistemático de tales transformaciones.

**Segundo**, aparte de este uso, se puede introducir como **prácticas de laboratorio** para resolver problemas en que se pida encontrar una fórmula matemática para una transformación conforme del disco a un dominio dado y visualizar esta transformación, así como todas las transformaciones intermedias. El programa de MatLab está pensado para una fácil implementación de estas tareas.

Es posible también incluir estas prácticas en el curso “Variable Compleja II”.

En los sitios web [25], [26], uno puede encontrar otras implementaciones de la visualización de transformaciones conformes y sus relaciones con la mecánica de fluidos y aerodinámica.

Durante el curso 2004/05 hemos incluido en nuestro curso unas prácticas de este tipo. Se dieron dos clases en el laboratorio informático, en las que explicamos el uso del programa a los estudiantes y distribuimos una lista de 22 dominios simplemente conexos. A cada estudiante se le pidió encontrar (y visualizar) las transformaciones conformes del disco unidad sobre un par de estos dominios y todos los pasos intermedios.

Cabe destacar que para utilizar este programa, no se necesitan conocimientos profundos de MatLab.

Los resultados de estas prácticas fueron bastante positivos. Aproximadamente un tercio de los estudiantes que asistían a las clases ha podido desarrollar correctamente esta tarea, tanto desde el punto de vista matemático como de programación.

#### **0.4. Sobre los métodos de evaluación: hojas de problemas, exámenes parciales y tutorías**

A lo largo del curso hemos utilizado las hojas de problemas que fueron elaboradas en los años anteriores por profesores Antonio Sánchez Calle, José Luís Fernández y otros del Departamento de Matemáticas de la UAM. Estas hojas, que consisten en total de unos 120 problemas, están, a nuestro modo de ver, bastante bien elaboradas.

Aparte de las clases teóricas y clases dedicadas a la resolución de problemas, hemos utilizado los siguientes recursos:

**Ejercicios en casa.** Una o dos veces durante el cuatrimestre se pedía la

entrega de ejercicios, resueltos en casa.

**Exámenes parciales.** Hicimos uno o dos durante el cuatrimestre. Una buena experiencia fue hacer un ensayo del examen final unas dos o tres semanas antes del final de la asignatura. Después de este ensayo, el grado de comprensión del auditorio aumentó visiblemente.

**Prácticas de laboratorio.** Se evaluó tanto la corrección de la solución teórica del problema (que tenía que ser entregado en papel) como la corrección del código en MatLab, que tenía que entregar el estudiante (por correo electrónico o pasando el fichero directamente al profesor).

**Tutorías.** Cualquiera de los recursos que acabamos de describir aumenta el número de estudiantes que acuden a las tutorías. Las prácticas de laboratorio despertaron tal interés que hemos hecho varias veces tutorías para varios alumnos a la vez (solía ser entre dos y cuatro).

**Métodos de evaluación.** La nota final fue una media ponderada de las dos notas: la nota de la evaluación de los resultados durante el cuatrimestre y la nota del examen final. Si la segunda nota era mayor, se tomaba en cuenta sólo ella. Los resultados de la evaluación continua no valían para el examen extraordinario de septiembre.

## 0.5. Metodología y contenidos de la asignatura

Dado que el curso “Variable Compleja I” se da actualmente en el tercer año de la licenciatura, puede ser considerado como relativamente elemental. Los contenidos de este curso son bastante clásicos e incluyen, a grandes rasgos, los siguientes temas:

1. Transformaciones conformes;
2. Integración y diferenciación en el contexto de la variable compleja (aquí incluimos el teorema y la fórmula de Cauchy, series de potencias, series de Laurent y residuos);
3. Propiedades globales de funciones holomorfas.

Sin embargo, la presentación de estos temas, el orden, así como los enunciados, puede variar mucho, dependiendo de cómo un autor afronta las dificultades de la exposición.

Mencionaremos brevemente las siguientes particularidades de nuestra presentación, motivados por la búsqueda del compromiso entre el rigor, la transparencia y la brevedad.



a) Desde el principio enfocamos nuestro estudio, subrayando la importancia de funciones que se desarrollan en series de potencias y anunciando que pretendemos desarrollar análogos de las teorías de diferenciación e integración para el caso de funciones complejas, definidas sobre conjuntos abiertos en el plano complejo. Todas las funciones elementales se interpretan naturalmente como funciones de este tipo.

b) No introducimos ni homotopía ni homología de curvas, basando la exposición en el Teorema de Jordan. De esta forma, los enunciados del teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy resultan ser más intuitivos. Se puede demostrar resultados más generales en el último tema.

c) No demostramos en este curso el Teorema Cauchy–Goursat, considerando este resultado menos importante para el manejo práctico de la materia que otros. Se puede mencionarlo en un lugar adecuado.

d) A cambio, incluimos bastante material sobre transformaciones conformes y sobre la existencia de primitivas. De hecho, el teorema que dice que cualquier función holomorfa en un dominio simplemente conexo tiene primitiva, es un punto básico de la lógica de nuestro razonamiento.

De ninguna forma pretendemos decir que esta elección es la única posible. Podemos mencionar las siguientes modificaciones de nuestra exposición, que son fáciles de implementar sin perjuicio de la lógica interna.

1) Hemos puesto el tema “Transformaciones conformes” al inicio del curso debido al deseo de poder incluir las prácticas con ordenador, que no pueden ser aplazadas hasta el final del cuatrimestre. Si no se incluyen estas prácticas, es aconsejable poner este tema como el último, para poder contar lo antes posible las series de Laurent y los residuos.

2) La construcción de la función armónica conjugada  $v$  de una función armónica  $u$  en un dominio simplemente conexo se hace sin problemas, repitiendo el procedimiento de Sección 31.

3) Es una buena idea incluir en el final del estudio de propiedades elementales, la resolución de ecuaciones cúbicas (que fueron la causa de la invención de los números complejos). Este tema es interesante para estudiantes y ayuda a reforzar el entendimiento del significado geométrico de los números complejos, incluyendo las raíces. En la actualidad, este tema con frecuencia no se incluye en el programa de la licenciatura.

4) Demostramos el Teorema 32.2, diciendo que cualquier función que se desarrolla en una serie de potencias es holomorfa, relativamente tarde, lo que causa problemas a la hora de resolver ejercicios. Se puede demostrarlo mucho antes, utilizando un conocido argumento (ver, por ejemplo, [21] o [22]).

5) No hemos incluido el teorema que afirma que cualquier función holomorfa definida en un dominio simplemente conexo y que no se anula tiene un logaritmo bien definido (y holomorfo). No obstante, se puede demostrar

sin dificultad este teorema al final de la Sección 45.

## 0.6. Sobre la bibliografía

Existen muchos excelentes libros de textos sobre Análisis Complejo. Mencionaremos especialmente el texto clásico de W. Rudin [23] y el más reciente texto [21] de Rao y Stetkær.

El libro de W. Rudin contiene una buena síntesis de Análisis real (incluyendo la teoría de la medida y las construcciones de la medida de Lebesgue y de la integral de Lebesgue), Análisis complejo y principios de Análisis funcional. El libro de Rao y Stetkær sorprende por la buena organización de la exposición y por su brevedad. Ambos contienen suficiente material tanto para los cursos de Variable Compleja I como de Variable Compleja II. El libro de Rudin incluye, por ejemplo, teoremas de aproximación más avanzados, como el Teorema de Mergelyan y una introducción a los espacios de Hardy en el disco, mientras que en el texto [21] uno puede encontrar, por ejemplo, una demostración del Teorema sobre la distribución de números primos.

Sin embargo, en nuestra opinión, estos textos sirven más para un curso de doctorado o como un guía para el profesor que para el primer encuentro de un estudiante de licenciatura con el Análisis complejo (salvo posiblemente estudiantes excelentes), porque requieren de una cultura matemática bastante elevada.

Otros textos tratan con profundidad otros aspectos de la teoría y pueden ser usados por el profesor para preparar un curso optativo de la licenciatura o un curso de doctorado según sus gustos personales. Por ejemplo, en el segundo tomo de [7] uno encuentra la exposición de la demostración de la conjetura de Bieberbach y de la teoría de potencial. En el tomo II de [17], entre otras cosas, hay una introducción comprensible a funciones e integrales elípticas.

En general, hablando del contexto universitario, uno puede dividir de forma provisional los textos en manuales de primera lectura para los estudiantes de licenciatura y textos más avanzados para los mejores estudiantes, alumnos de doctorado y profesores.

Los libros [1, 2, 4, 5, 13, 22] pertenecen a la primera categoría y los libros [3, 7, 17, 21, 23] a la segunda.

Mencionaremos aquí la colección de problemas [24], que es adecuada para nuestros fines.

El reciente libro [20] contiene enunciados de los resultados principales de la teoría y soluciones detalladas de muchos problemas. Según nuestra experiencia, resulta ser muy útil para los estudiantes.

Cada libro propone su manera de afrontar las dificultades de exposición que hemos mencionado. En muchos, se demuestra primero algún enunciado más débil de la fórmula de Cauchy, por ejemplo, sólo para dominios convexos o estrellados.

Cabe observar que la situación con la metodología de la enseñanza de este curso cambió hace relativamente poco con de la aparición del artículo de Dixon [10] en 1971. Allí se da una demostración rigurosa de la fórmula de Cauchy en la siguiente forma:

**Teorema 0.1** (La versión homológica de la fórmula de Cauchy). *Sea  $G$  un conjunto abierto en el plano complejo. Si  $f$  es holomorfa en  $G$  y  $\gamma$  es una curva en  $G$  (o un ciclo), que satisface  $\text{rotac}_\gamma \lambda = 0$  para todo punto  $\lambda \notin G$ , entonces*

$$f(\lambda) \cdot \text{rotac}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - \lambda} dz \quad \text{para todo } \lambda \in G \setminus \gamma.$$

Los libros de Rao y Stetkær [21] y de Rudin [23] y otros incorporan esta sugerencia. Ahlfors en [1] demuestra el mismo teorema con un método distinto. Existe una versión de este libro en español, pero es anterior, y su exposición es todavía antigua.

Este tipo de exposición evita (al menos formalmente) el uso del Teorema de Jordan y tiene más rigor matemático, pero, en nuestra opinión, es un poco menos transparente que el método tradicional y conduce a un camino más largo. En esta memoria nos basamos en el Teorema de Jordan, cuya demostración (para el caso de curvas diferenciables a trozos) se da en el Apéndice I.

# La distribución del temario por horas

El curso se imparte en, aproximadamente, 50 horas lectivas. Es necesario subrayar que en algunos temas (como, por ejemplo, en el cálculo de integrales definidas con métodos de variable compleja o el Teorema de Rouché) se necesita poner más énfasis en la resolución de problemas.

Dedicamos 2 horas a los exámenes parciales.

**Capítulo I.** Propiedades elementales de los números complejos. La definición de función holomorfa.

**Tema 1** (*1 hora*) (1) Introducción. Funciones analíticas de la variable real y de la variable compleja; (2) Historia de análisis complejo.

**Tema 2** (*2 horas*) (3) Propiedades elementales de números complejos. (4) Raíces cuadradas.

**Tema 3** (*1 hora*) (5) Ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos. (6) Ejemplos de funciones analíticas en el plano complejo: funciones exponenciales y trigonométricas.

**Tema 4** (*1.5 horas*) (7) La definición de función holomorfa.

**Tema 5** (*1 hora*) (8) Logaritmos de números complejos. Ramas del argumento y ramas del logaritmo.

**Tema 6** (*1 hora*) (9) Ramas de raíces. (10) Funciones armónicas.

**Tema 7** (*1 hora*) (11) Sucesiones y series con términos complejos. (12) La esfera de Riemann y la proyección estereográfica.

**Tema 8** (*1 hora*) (13) Un repaso de la convergencia uniforme.

**Tema 9** (*2 horas*) (14) Series de potencias. (15) Funciones elementales.

**Capítulo II.** Aspectos geométricos: transformaciones conformes.

**Tema 10** (*1 hora*) (16) El número de rotación de una curva.

**Tema 11** (*1 hora*) (17) El Teorema de Jordan. (18) La relación entre la existencia de las ramas del logaritmo en un dominio y su topología.

**Tema 12** (2.5 horas) (19) Transformaciones conformes. Transformaciones de Möbius.

**Tema 13** (1 hora) (20) Un breve recordatorio sobre las curvas de segundo orden en el plano. (21) La función potencia como transformación conforme.

**Tema 14** (1.5 horas) (22) Las funciones cuadrado y raíz cuadrada y dominios con fronteras parabólicas e hiperbólicas. (23) Las transformaciones de Riemann para dominios de forma “lunar”.

**Tema 15** (1.5 horas) (24) La función de Joukowski.

**Tema 16** (1 hora) (25) Las ramas de la inversa a la función de Joukowski.

**Tema 17** (1 hora) (26) Dominios con cortes.

### Capítulo III. Integración. Series de potencias.

**Tema 18** (1.5 horas) (27) Repaso de las integrales de línea en  $\mathbf{R}^n$ .

**Tema 19** (1.5 horas) (28) Las integrales complejas de línea.

**Tema 20** (1 hora) (29) La fórmula de Green y el teorema de Cauchy.

**Tema 21** (2 horas) (30) El teorema de los residuos. La fórmula de Cauchy.

**Tema 22** (1 hora) (31) La integral y la primitiva.

**Tema 23** (1 hora) (32) Las series de potencias como funciones holomorfas.

**Tema 24** (1 hora) (33) El desarrollo de funciones holomorfas en series de potencias.

**Tema 25** (1 hora) (34) La función arcotangente.

### Capítulo IV. Series de Laurent y residuos.

**Tema 26** (1 hora) (35) Series de Laurent.

**Tema 27** (1 hora) (36) Tipos de singularidades aisladas de funciones holomorfas. (37) El orden de cero y el orden del polo. Funciones meromorfas.

**Tema 28** (2 horas) (38) Fórmulas de cálculo de residuos.

**Tema 29** (4 horas) (39) Cálculo de integrales definidas con métodos de variable compleja.

**Capítulo V.** Propiedades globales de funciones holomorfas.

**Tema 30** (*1 hora*) (40) Ceros de funciones holomorfas. Teorema de continuación única. (41) Funciones meromorfas en un dominio.

**Tema 31** (*2 horas*) (42) Teorema de Liouville. Teorema principal del Álgebra.

**Tema 32** (*2 horas*) (43) Propiedades locales de las funciones holomorfas. Principio del módulo máximo.

**Tema 33** (*3 horas*) (44) Lema de Schwartz. (45) Principio del argumento. Teorema de Rouché.

# Capítulo I. Propiedades elementales de los números complejos. La definición de funciones holomorfas.

## 1. Introducción. Funciones analíticas de variable real y de variable compleja

El Análisis Complejo forma parte del Análisis Matemático, pero tiene sus particularidades. Es, quizás, una de sus partes más bellas. Muchos fenómenos de la variable real sólo se explican bien desde el punto de vista de la variable compleja.

Recordemos que en la teoría de funciones de la variable real, la misma elección del conjunto de funciones que se van a estudiar ya presenta una cierta dificultad. Al final se adoptan varias definiciones con una especificación del grado de suavidad, es decir, del número de derivadas existentes. Se definen las clases  $C^k$  de funciones sobre un intervalo como clases de funciones cuyas  $k$  primeras derivadas existen y son continuas. Todas estas clases son diferentes; por ejemplo, la función  $f(x) = |x| \cdot x^k$  está en  $C^k(\mathbb{R})$ , pero no está en  $C^{k+1}(\mathbb{R})$ . Diferentes teoremas del Cálculo tienen como hipótesis la existencia de un número determinado de derivadas. Por ejemplo, para definir un polinomio de Taylor de grado  $n$  de una función en un punto se necesita que esta función tenga  $n$  derivadas en este punto.

Una herramienta más poderosa que el polinomio de Taylor es una serie de Taylor. Se ha visto en la teoría de la variable real que toda función elemental se desarrolla en una serie de Taylor en un entorno de todo punto interior de su dominio de definición. Recordemos la fórmula para la serie de Taylor de la función  $f$  en el punto  $a$ :

$$T_{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (1.1)$$

Decimos que una función  $f$  se desarrolla en un entorno de  $a$  en una serie de Taylor si  $f$  tiene infinitas derivadas en  $a$  y existe un entorno  $(a - \delta, a + \delta)$  del punto  $a$  tal que para todo  $x$  en este entorno, la serie (1.1) converge y su

suma  $T_{f,a}(x)$  coincide con el valor  $f(x)$ . Las funciones  $e^x$ ,  $\operatorname{sen} x$ ,  $\operatorname{cos} x$ ,  $\operatorname{arc\,tg} x$  se desarrollan en una serie de Taylor en un entorno de cualquier  $a$  real, la función  $\log x$  en un entorno de cualquier  $a$  positivo, y la función  $\operatorname{arc\,sen} x$  en un entorno de cualquier  $a$  en el intervalo  $(-1, 1)$ .

Recordemos algunos de estos desarrollos en puntos  $a$  concretos:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \dots \quad (1.2)$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \quad (1.3)$$

$$\log x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots \quad (1.4)$$

En desarrollos (1.2) y (1.3),  $a = 0$ , y en (1.4),  $a = 1$ .

**Definición.** Una función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en un conjunto abierto  $U$  en el eje real, se llama *analítica real*, si todo punto  $a$  en  $U$  tiene un entorno, donde  $f$  coincide con su desarrollo de Taylor en  $a$ .

Si una serie de potencias  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$  converge en un entorno de punto  $a$  a una función  $f$ , es en realidad la serie de Taylor de  $f$  en  $a$ . Por lo tanto, en esta definición en vez de hablar de los desarrollos de Taylor de  $f$  podemos pedir simplemente que cada punto  $a$  en  $U$  tenga un entorno donde  $f$  se represente por *alguna* serie de potencias.

Recordemos que no toda función infinitamente diferenciable en  $\mathbb{R}$  satisface la anterior definición. Un ejemplo más conocido es la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Para esta función,  $T_{f,0}(x)$  converge en todo el eje real,<sup>1</sup> pero  $T_{f,0}(x) \neq f(x)$  para  $x \neq 0$ .

Si nos restringimos a funciones analíticas reales, existen también diferencias apreciables entre ellas. Por ejemplo, las dos funciones  $e^x$  y  $\operatorname{arc\,tg} x$  son analíticas reales sobre todo el eje  $\mathbb{R}$ . Sin embargo, el desarrollo (1.2) converge para todo  $x$ , y el desarrollo (1.3) sólo converge para  $|x| \leq 1$ . Desde el punto de vista de la variable real, no se ve ninguna razón para ello. En nuestro curso veremos una clara y sorprendente explicación de este fenómeno en términos de la teoría de la variable compleja (ver §34).

Una observación básica para comenzar el estudio de funciones de la variable compleja consiste en lo siguiente: Supongamos que  $f$  es una función

---

<sup>1</sup>De hecho,  $T_{f,0}(x) \equiv 0$ , porque  $f^{(n)}(0) = 0$  para todo  $n$ .



analítica real y  $a$  es un punto de su dominio de definición; escribamos el desarrollo de Taylor de  $f$  en  $a$ . Según la definición,  $f$  coincide con su desarrollo de Taylor en algún intervalo  $(a - \delta, a + \delta)$ . Entonces es fácil ver que la serie  $T_{f,a}$  también converge, si la evaluamos en un número  $z$  complejo, siempre y cuando  $|z - a| < \delta$ . Esta observación nos permite *extender el dominio de definición de  $f$* , poniendo  $f(z) = T_{f,a}(z)$  para puntos  $z$  con la propiedad indicada.

Estos comentarios, que necesitan de hecho una mayor precisión, sugieren la siguiente

**Definición.** Una función  $f : W \rightarrow \mathbb{C}$ , definida en un subconjunto abierto  $W$  del conjunto de números complejos, se llama *analítica*, si todo punto  $z_0$  en  $W$  tiene un entorno, donde  $f$  se desarrolla en una serie de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

Como veremos más adelante, todas las funciones elementales tienen extensiones analíticas a ciertos dominios en el plano complejo. Las funciones  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$  se extienden a todo el plano complejo.

Según el esquema usual de desarrollo de un curso de análisis real, primero se estudia la diferenciación y luego la integración, ya que la mayor parte de la teoría de diferenciación no depende de la integración. Nuestro estudio del análisis complejo va a seguir las siguientes líneas:

- 1) El repaso de propiedades elementales de números complejos.
- 2) Diferenciación de funciones complejas.
- 3) Aspectos geométricos de la teoría (transformaciones conformes).
- 4) La integración de funciones complejas.

A pesar de la similitud, las partes de la teoría compleja están lógicamente mucho más relacionadas entre sí. De hecho, sólo después de demostrar los principales resultados sobre la integración (el teorema de Cauchy y la fórmula de Cauchy) seremos capaces de entender bien la diferenciación.

La teoría de la variable compleja se usa en muchos campos de las ciencias exactas y de la tecnología. Quiero mencionar, por ejemplo, *la transformada de Laplace*. Si  $f$  es una función en  $[0, \infty)$ , que no crece más que exponencialmente, su transformada de Laplace se define como

$$(\mathcal{L}f)(z) = \int_0^{\infty} e^{-tz} f(t) dt.$$

Es una función analítica de  $z$  si  $\operatorname{Re} z$  es suficientemente grande.

La transformada de Laplace es una pariente más próxima de la transformada de Fourier. Está definida en un semiplano del tipo  $\{\operatorname{Re} z > \alpha\}$ , donde el número  $\alpha$  depende del orden de crecimiento de  $f$ . Proporciona información sólo si permitimos darle a  $z$  valores complejos, y es una herramienta básica en varios campos de ingeniería, por ejemplo, en la teoría de control y la teoría de la señal. La variable compleja se usa también en la teoría de probabilidades y estadística, en la electrostática, en la hidrodinámica, en la mecánica cuántica; de hecho, difícilmente se encuentra un área tecnológica donde no se use en absoluto.

## 2. Historia de análisis complejo

La historia de la invención de análisis es relativamente reciente; Newton y Leibniz son unos de los principales descubridores. La exposición adoptada en los cursos universitarios modernos no siempre sigue la historia del desarrollo de la materia. Los planteamientos de Isaac Newton (1643–1727) y en menor medida de Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) estuvieron muy motivados por las aplicaciones; por ejemplo, Newton descubrió desde el principio un método muy general para encontrar soluciones de ecuaciones diferenciales, representándolas como series de potencias con coeficientes indeterminados. Él aplicaba este método en su Mecánica.

Los números imaginarios surgieron por primera vez en relación con la resolución de ecuaciones cúbicas en el llamado caso irreducible. Fue en los trabajos de Cardano y Bombelli a mediados del siglo XVI. Hacia mediados del siglo XVIII, en la práctica matemática entraron diferentes aspectos de la comprensión del número complejo, tanto variable como constante. Podemos mencionar aquí los nombres de D'Alembert (1717–1783), Johann Bernoulli (1667–1748), Leonard Euler (1707–1783) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Los mayores méritos en ello pertenecen a Euler.

No obstante, aún durante mucho tiempo, la naturaleza de los números complejos no fue comprendida y se consideraba sobrenatural. En el año 1702 Leibniz escribió que “los números imaginarios son un hermoso y maravilloso refugio del espíritu divino, casi como la dualidad entre la existencia y la no existencia”.

El desarrollo riguroso tanto del análisis real como del análisis complejo tardó mucho más que la rápida exploración de sus métodos por sus fundadores. Las primeras exposiciones sistemáticas del análisis complejo cercanas a las modernas se encuentran en trabajos de Augustin-Louis Cauchy “Memoria sobre la teoría de las integrales definidas” y “Memoria sobre las integrales definidas tomadas entre límites imaginarios” del año 1825, así como

en los trabajos de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) y de Karl Weierstrass (1815–1897).

Voy a dar dos ejemplos de las paradojas que impedían un desarrollo riguroso más rápido de la teoría. La primera concierne a las raíces y la segunda a los logaritmos.

**Paradoja 1.** Empezamos con la indudable igualdad

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1},$$

y tomamos las raíces cuadradas:

$$\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}},$$

lo cual se traduce en la igualdad  $\sqrt{1} \cdot \sqrt{1} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ . Es decir, deducimos que

$$1 = -1.$$

**Paradoja 2.** Esta paradoja está relacionada con los intentos de Bernoulli y Leibniz de definir el logaritmo neperiano de un número complejo. Primero vamos a acordar que cualquier que sea la definición de  $\log z$ , se tiene que cumplir la igualdad  $e^{\log z} = z$  (para todo  $z$  en el dominio de definición del logaritmo).

La igualdad  $1^2 = (-1)^2$  implica que  $\log 1^2 = \log(-1)^2$ , es decir, deducimos que  $2 \log 1 = 2 \log(-1)$ ,  $\log 1 = \log(-1)$ . La última igualdad ya nos da una contradicción, porque se obtiene  $e^{\log 1} = e^{\log(-1)}$ , es decir,  $1 = -1$ .

Estas contradicciones sólo desaparecen si admitimos que la raíz cuadrada y el logaritmo toman múltiples valores, lo que constituye un punto inicial de la teoría de funciones analíticas *multiformes*. Debido a las restricciones del tiempo, en este curso sólo tocaremos un poco esta teoría.

### 3. Propiedades elementales de números complejos

Haremos primero un breve repaso de la estructura de los números complejos.

**Definición.** Diremos que un número complejo es un par  $(a, b)$  de números reales.

Utilizaremos la notación  $\mathbb{C}$  para el conjunto de números complejos.

Como vemos, el conjunto  $\mathbb{C}$  es isomorfo al espacio vectorial  $\mathbb{R}^2$ , y la suma de números complejos efectivamente está definida como la suma de los correspondientes vectores:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

La diferencia entre  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{C}$  está en que en  $\mathbb{C}$  se tiene una estructura adicional.

El cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales se entiende como un subconjunto del conjunto de los números complejos; es decir, identificaremos un número real  $a$  con el par  $(a, 0) \in \mathbb{C}$ . Definamos el producto de un número real  $\lambda$  por un número complejo  $(a, b)$ ; el resultado es el mismo que la multiplicación del escalar  $\lambda$  por el vector  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , es decir,

$$\lambda \cdot (a, b) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda a, \lambda b) \quad \lambda \in \mathbb{R}, (a, b) \in \mathbb{C}.$$

De hecho, el conjunto  $\mathbb{C}$  tiene una estructura de cuerpo, así que hemos de definir un producto de dos números complejos cualesquiera.

Vemos que cualquier número complejo  $(a, b)$  se expresa como

$$(a, b) = (a, 0) + b \cdot (0, 1).$$

Introduciendo un símbolo especial  $i$  para el par  $(0, 1)$ , en vista de la identificación  $(a, 0) \equiv a$  se tiene que

$$(a, b) = a + bi.$$

Esta notación para designar los números complejos se llama *binomial*, y es la más usual. La emplearemos desde ahora. Salvo los casos cuando se especifica lo contrario, usaremos la notación  $a + bi$  sólo para  $a$  y  $b$  reales.

Ponemos por definición

$$i^2 = -1.$$

Esta fórmula y la ley distributiva ya determinan de una forma única el producto de dos números complejos cualesquiera:

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (= (ac - bd, ad + bc)).$$

Si  $z = a + bi$ , se dice que  $a$  es la *parte real* de  $z$  y  $b$  la *parte imaginaria* de  $z$ :  $a = \text{Re } z$ ,  $b = \text{Im } z$ . Los números complejos con parte real 0 se denominan *imaginarios puros*.

**Proposición 3.1.** *El conjunto  $\mathbb{C}$  de los números complejos con las operaciones de suma y producto así definidas tiene estructura de cuerpo.*

Recordemos que un conjunto tenga la estructura de cuerpo significa lo siguiente:

- (1) Es un grupo conmutativo respecto de la suma;
- (2) Este mismo conjunto sin el elemento 0 es un grupo conmutativo respecto del producto;
- (3) Las operaciones de la suma y del producto se relacionan entre sí según la ley distributiva.

Otros ejemplos de cuerpos son el cuerpo  $\mathbb{Q}$  de los números racionales y el cuerpo  $\mathbb{R}$  de los números reales; mencionemos también los cuerpos de característica no nula, conocidos del curso de Álgebra.

Como  $\mathbb{R}$  es un subconjunto de  $\mathbb{C}$  y las operaciones aritméticas en  $\mathbb{C}$  son extensiones de las mismas operaciones de  $\mathbb{R}$ , podemos afirmar también que  $\mathbb{R}$  es un subcuerpo de  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{C}$  es una extensión del cuerpo  $\mathbb{R}$ .

Dejamos al lector la comprobación formal de las propiedades (1) - (3) de los números complejos, ya que es bastante rutinaria.

Es oportuno hacer también los siguientes comentarios. A todo número complejo  $z = a + bi$  se le asocia su *número conjugado*  $\bar{z} = a - bi$ . El producto  $z \cdot \bar{z}$  es siempre un número real no negativo:

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2,$$

donde *el módulo* de un número  $z = a + bi \in \mathbb{C}$  se define como

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Nótese que  $|z|$  es simplemente el módulo del correspondiente vector en el plano.

Según las propiedades de cuerpo, todo número complejo  $z$  no nulo ha de tener un único número inverso  $z^{-1}$  tal que  $z \cdot z^{-1} = 1$ . La operación de conjugación permite expresar  $z^{-1}$ . Efectivamente, como  $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ , se tiene que  $z \cdot \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$ , luego

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

El mismo procedimiento sirve para expresar la división de dos números complejos. Si  $z, w \in \mathbb{C}$  y  $w \neq 0$ , se tiene

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}.$$

Geoméricamente, se suele interpretar a los números complejos como el plano  $\mathbb{R}^2$ ; el plano interpretado de esta forma se denomina *plano complejo*. En adelante llamaremos *eje real* al eje de abscisas (el eje horizontal) y *eje*

*imaginario* al eje de ordenadas (eje vertical). La conjugación en esta interpretación se traduce en la simetría respecto del eje real; nótese que  $\bar{\bar{z}} = z$ .

La operación de conjugación tiene una importante propiedad más: conserva las operaciones aritméticas entre los números. Es decir,

$$\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}},$$

etc. para todo par de números complejos  $z, w$ .

En coordenadas polares, todo número  $z = x + iy \neq 0$  se caracteriza por el módulo  $r = |z|$  y el *argumento*  $\theta$ , que se definen mediante fórmulas

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \operatorname{sen} \theta.$$

Se escribe  $\theta = \arg z$ . Dados el módulo  $r$  y el argumento  $\theta$  de un número complejo  $z$ , lo podemos expresar como

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta).$$

Esta representación de un número complejo se llama *representación trigonométrica*.

Como es bien sabido, el argumento no está definido de manera única, ya que  $\theta - 2\pi, \theta + 2\pi$ , y en general  $\theta + 2k\pi$ , donde  $k$  es cualquier número entero, representan el mismo ángulo que  $\theta$ . Muchas veces se elige un argumento con la propiedad adicional  $\theta \in [0, 2\pi)$  ó bien  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

Si  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  son curvas lisas en el plano complejo que comienzan en el mismo punto  $z_0$ , por *ángulo* entre estas curvas en  $z_0$  entendemos el ángulo entre sus vectores tangentes.

La interpretación geométrica de los números complejos fue introducida por Karl Friedrich Gauss y resulta muy útil en la teoría. Se puede decir que con ella se ha superado la mística que caracterizaba las etapas iniciales de la teoría. Todas las operaciones aritméticas se interpretan en el plano complejo de forma muy natural. La suma, la diferencia y el producto con un número real se interpretan como correspondientes operaciones vectoriales. Si  $z, w \in \mathbb{C}$ , el módulo  $|z - w|$  es igual a la distancia euclídea entre los puntos  $z$  y  $w$ . El conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

es el disco abierto de radio  $r$  centrado en el punto  $z_0$ .

La multiplicación y la división de números complejos se interpretan mejor en coordenadas polares:  $zw$  es el número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos de  $z$  y de  $w$ , y cuyo argumento es la suma de los argumentos de  $z$  y de  $w$ . Para dividir  $z$  por  $w$ , hay que dividir los módulos y

restar los argumentos (estamos suponiendo que  $z$  y  $w$  no son nulos). Como consecuencia, vemos que

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \implies z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))$$

(aquí  $n$  es un número entero). En particular, poniendo  $r = 1$ , obtenemos la *fórmula de De Moivre*  $(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$ .

Se tienen las siguientes propiedades.

$$\begin{aligned} |z + w| &\leq |z| + |w|, & |z| - |w| &\leq |z - w|, \\ |\operatorname{Re} z| &\leq |z|, & |\operatorname{Im} z| &\leq |z|, & |\bar{z}| &= |z|, & |z^n| &= |z|^n, \\ \operatorname{Re} z &= \frac{z + \bar{z}}{2}, & \operatorname{Im} z &= \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{aligned}$$

Haremos también una lista de las propiedades básicas del argumento.

$$\begin{aligned} \arg(zw) &= \arg z + \arg w, & \arg\left(\frac{z}{w}\right) &= \arg z - \arg w, \\ \arg\left(\frac{1}{z}\right) &= \arg \bar{z} = -\arg z, & \arg(z^n) &= n \arg z. \end{aligned}$$

Dado que el argumento se define sólo módulo un sumando  $2\pi k$ , la forma de entender cada una de estas igualdades es la siguiente: para cualquier elección de los argumentos en la partes derecha, se obtiene *uno de los argumentos* de la expresión en las parte izquierda. Por ejemplo, para cualquier elección de  $\arg z$  y  $\arg w$ , la suma de estos dos números da uno de los argumentos de  $zw$ .

Es muy importante entender muy bien la función “argumento” para evaluar bien las raíces. La falta de unicidad en esta definición hace que los números complejos tengan muchas raíces. Más precisamente, un número complejo no nulo  $z$ , para cualquier  $n$  natural, tiene exactamente  $n$  raíces  $n$ -ésimas.

Vamos a deducir la fórmula de las raíces. Sea  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$  un número dado; queremos resolver la ecuación

$$w^n = z.$$

Sean

$$z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta), \quad w = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

las representaciones trigonométricas de  $z$  y  $w$ , entonces nuestra ecuación equivale a dos relaciones

$$\rho^n = r; \quad n\varphi = \theta \pmod{2\pi}.$$

Para encontrar los posibles valores de  $w$ , hemos de encontrar los posibles valores de  $\rho$  y  $\theta$ .

La primera relación se resuelve de una forma única:  $|w| = \rho = \sqrt[n]{r}$ . Fijemos uno de los argumentos  $\theta$  de  $z$ . Entonces vemos que la segunda ecuación tiene soluciones

$$\varphi = \frac{\theta + 2\pi k}{n};$$

se ve también que se obtienen valores diferentes de  $w$ , cogiendo  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ . Para los demás valores de  $k$  se obtienen los mismos valores de  $w$ . Por lo tanto, *la raíz  $\sqrt[n]{z}$  tiene  $n$  valores diferentes, que tienen todos el mismo módulo y se dan por las fórmulas*

$$|\sqrt[n]{z}| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg(\sqrt[n]{z}) = \frac{\arg z + 2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

Los valores de  $\sqrt[n]{z}$  se ubican en vértices de un polígono regular de  $n$  lados, centrado en el origen e inscrito en la circunferencia de radio  $\sqrt[n]{|z|}$ .

## 4. Raíces cuadradas

La raíz cuadrada de un número complejo tiene también una expresión en forma binomial. Vamos a deducir esta forma.

Dado un número complejo  $a + bi$ , queremos encontrar  $c + di \in \mathbb{C}$  tal que

$$(c + di)^2 = a + bi.$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones para  $c$  y  $d$

$$c^2 - d^2 = a; \quad 2cd = b. \quad (4.1)$$

Utilizaremos el siguiente resultado.

**Teorema** (François Viète, 1540–1603). *1) Dada una ecuación cuadrática*

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

*sus raíces  $x_1, x_2$  satisfacen las fórmulas*

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}, \quad x_1 x_2 = \frac{C}{A}. \quad (4.2)$$

*2) Recíprocamente, si tenemos dos números  $x_1, x_2$ , que satisfacen (4.2), entonces son raíces de la ecuación  $x^2 + Bx + C = 0$ .*



En el curso de bachillerato, se suele ver este teorema para el caso cuando  $A, B, C, x_1, x_2$  son reales, y éste es el único caso que necesitamos ahora. El teorema de Viete es cierto también para el caso complejo.

Como consecuencia de (4.1), obtenemos las ecuaciones

$$c^2 + (-d^2) = a; \quad c^2 \cdot (-d^2) = -\frac{b^2}{4}. \quad (4.3)$$

Debido al apartado 2) del teorema de Viete, vemos de (4.3) que los números  $c^2$  y  $-d^2$  son raíces reales de la ecuación  $x^2 - ax - \frac{b^2}{4} = 0$ . Las raíces de esta ecuación son

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Teniendo en cuenta que  $c^2 \geq 0$ ,  $-d^2 \leq 0$ , obtenemos las fórmulas

$$c^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}, \quad d^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}. \quad (4.4)$$

Suponiendo que  $b \neq 0$ , vemos que tenemos dos opciones para elegir el valor de  $c$  e, independientemente, dos opciones para el valor de  $d$ , lo que nos daría 4 posibilidades. En realidad, de estas 4 posibilidades sólo se quedan dos, debido a que la igualdad  $2cd = b$  en el sistema (4.1) no se sigue de la igualdad  $c^2 \cdot (-d^2) = -\frac{b^2}{4}$  en el sistema (4.3). Finalmente obtenemos la siguiente regla para calcular raíces cuadradas.

Supongamos que  $b \neq 0$ . Entonces

$$\sqrt{a + bi} = \pm(c + di)$$

donde  $c, d$  se hallan de la fórmula (4.4), respetando “la ley de signos”

$$\text{sign}(cd) = \text{sign}(b).$$

Si  $b = 0$ , los dos valores de  $\sqrt{a}$  se hallan sin dificultades.

**Ejemplo.** Calculemos los valores de  $\sqrt{3 - 4i}$ .

**Solución:**  $a = 3, b = -4, c^2 = \frac{5+3}{2} = 4, d^2 = \frac{5-3}{2} = 1$ . Según “la ley de los signos”,  $\sqrt{3 - 4i} = \pm(2 - i)$ . Comprobación:  $(2 - i)^2 = 2^2 - 1^2 - 2 \cdot 2 \cdot i = 3 - 4i$ .

## 5. Ecuaciones cuadráticas con coeficientes complejos

El mismo procedimiento por el que se resuelve la ecuación cuadrática con coeficientes reales (la compleción al cuadrado) sirve también para el caso de coeficientes complejos. Así se obtiene la misma fórmula:

Las soluciones de la ecuación  $Az^2 + Bz + C = 0$  con coeficientes complejas son

$$z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}.$$

Si  $B^2 - 4AC = 0$ , las dos raíces coinciden. Si  $B^2 - 4AC \neq 0$ , obtenemos dos raíces complejas diferentes. Por lo tanto, **en el plano complejo cualquier polinomio de orden 2 tiene exactamente dos raíces**. Más adelante en este curso demostraremos el siguiente teorema.

**Teorema** (Teorema Fundamental del álgebra). *En el plano complejo cualquier polinomio de orden  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces (contadas de acuerdo con su multiplicidad).*

**Ejemplo.** Resolver la ecuación  $z^2 - (5 - 3i)z + (2 - 6i) = 0$ .

**Solución:**  $D = B^2 - 4AC = 8 - 6i$ ;  $z_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A} = \frac{(5-3i) \pm (3-i)}{2}$ ;  $z_1 = 1 - i$ ,  $z_2 = 4 - 2i$ . Para comprobar el resultado, se puede usar el teorema de Viete (para el caso complejo).

## 6. Ejemplos de funciones analíticas en el plano complejo: funciones exponenciales y trigonométricas

La teoría sistemática de funciones analíticas se va a desarrollar más adelante, a lo largo de todo el curso. En este apartado vamos a adelantar algunos ejemplos importantes, que nos permitirán motivar mejor las construcciones posteriores.

Como hemos mencionado en la Introducción, una función analítica de la variable compleja  $z$  puede definirse por una serie de potencias de  $z$ . En general, decimos que una serie  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , cuyos términos  $u_n$  son vectores de  $\mathbb{R}^k$ , converge al vector  $v$ , si la distancia en  $\mathbb{R}^k$  en la norma euclídea entre las sumas parciales  $\sum_{n=1}^N u_n$  de la serie y  $v$  tiende a 0 cuando  $N$  tiende a  $\infty$ . Como la desigualdad triangular se cumple también para vectores en  $\mathbb{R}^k$ , la convergencia absoluta de una serie implica su convergencia también en este contexto de series vectoriales.

La convergencia de una serie con términos complejos se entiende como la convergencia en  $\mathbb{R}^2$ , lo que equivale simplemente a la convergencia por separado de las partes reales y de las partes imaginarias.

**Definición.** La función exponencial  $\exp(z)$  de una variable compleja  $z$  se define por la serie

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Aplicando, por ejemplo, el criterio de D'Alembert de convergencia absoluta, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \bigg/ \frac{|z|^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

para todo  $z$ , lo que implica que esta serie converge absolutamente para todo número  $z$  complejo. Como esta serie coincide con el desarrollo en la serie de Maclaurin de la función exponencial para valores reales de  $z$ , vemos que hemos definido una continuación de la función exponencial de la variable real.

**Lema 6.1.** Para todos  $z$  y  $w$  complejos,

$$\exp(z+w) = \exp(z) \exp(w).$$

*Demostración.* Esta identidad se comprueba multiplicando las series y reagrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned} \exp(z) \exp(w) &= \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{m+n=k \\ m,n \geq 0}} \frac{z^m w^n}{m! n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{m+n=k \\ m,n \geq 0}} \frac{(m+n)!}{m! n!} z^m w^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (z+w)^k = \exp(z+w) \end{aligned}$$

(hemos utilizado aquí el binomio de Newton para  $(z+w)^k$ ). La reagrupación está justificada porque las series de  $\exp(z)$  y  $\exp(w)$  convergen absolutamente.  $\square$

La función exponencial del argumento puramente imaginario se expresa a través de funciones trigonométricas. Efectivamente, sustituyendo  $z = iy$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , y separando la parte real y la parte imaginaria, obtenemos

$$\begin{aligned} \exp(iy) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n \text{ par}} \frac{(iy)^n}{n!} + \sum_{n \text{ impar}} \frac{(iy)^n}{n!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} = \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

De aquí se deduce la fórmula para  $\exp z$  para cualquier  $z = x + iy$  complejo:

$$e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y). \quad (6.1)$$

Ahora tenemos una nueva manera de escribir un número  $z$  en la forma trigonométrica:

$$z = |z|e^{i \arg z}.$$

El lema 6.1 explica también la regla geométrica de multiplicación de números complejos. Simplemente, dados unos números complejos  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ , se tiene que

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Vemos de nuevo que al multiplicar dos números complejos, sus módulos se multiplican y sus argumentos se suman.

Como una consecuencia fácil de (6.1), mencionaremos también la fórmula

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

Obtenemos también **las fórmulas de Euler**, que expresan las funciones  $\cos y$ ,  $\operatorname{sen} y$  de la variable real  $y$  a través de la función exponencial  $\exp$ , evaluada en un número imaginario:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}.$$

De la misma forma que la función exponencial, las series de Taylor de las funciones  $\operatorname{sen}$  y  $\cos$  permiten definir las para cualquier número complejo.

**Definición.** El coseno y el seno de cualquier número complejo  $z$  vienen dados por las fórmulas

$$\cos z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m}}{(2m)!}, \quad \operatorname{sen} z = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{z^{2m+1}}{(2m+1)!}. \quad (6.2)$$

**Ejercicios. 1)** Encontrar las imágenes de las rectas  $\{\operatorname{Re} z = \text{const}\}$ ,  $\{\operatorname{Im} z = \text{const}\}$  por la función exponencial.

**2)** Demostrar que las fórmulas

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad (6.3)$$

siguen siendo válidas para cualquier  $z$  complejo.

**3)** Demostrar la fórmula  $1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$  para  $z \neq 1$ .

4) Si  $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$ , entonces

$$1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} \right),$$

y

$$\sin \theta + \sin 2\theta + \cdots + \sin n\theta = \frac{\sin(\frac{n+1}{2}\theta) \sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

Sugerencia: Usar 2) con  $z = i\theta$ .

## 7. La definición de función holomorfa

**Definiciones previas.** Por  $D(a, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < \varepsilon\}$  denotaremos el disco de centro  $a$  y radio  $\varepsilon$ .

Dado un subconjunto  $E$  del plano complejo decimos que:

(1)  $E$  es *abierto* si para todo punto  $a$  en  $\Omega$ , existe un disco centrado en  $a$  que está contenido en  $\Omega$ .  $E$  es *cerrado* si su complemento  $\mathbb{C} \setminus E$  es abierto.  $E$  es *compacto* si es cerrado y acotado.

(2)  $E$  es *arcoconexo* si  $\forall z_1, z_2 \in E$ , existe una curva continua  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  que se contiene en  $E$  y une  $z_1$  con  $z_2$  (es decir,  $z_1$  con  $z_2$  son los extremos de  $\gamma$ ).

(3)  $E$  es *una región o dominio* si es abierto y arcoconexo.

Dado un dominio  $E$  en el plano complejo, una función  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ , y un punto  $z_0 \in E$ , denotaremos por

$$\Delta f(z_0, h) = f(z_0 + h) - f(z_0)$$

el incremento de la función  $f$  cuando su argumento cambia de  $z_0$  a  $z_0 + h$ ; aquí  $h$  es un número complejo. Podemos primero considerar la derivabilidad de  $f$  en  $z_0$  en el sentido de la teoría de funciones de varias variables reales. En este caso la derivada de  $f$  se entiende como una aplicación lineal

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

que cumple la condición

$$\Delta f(z_0, h) = T(h) + o(h), \quad h \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad h \rightarrow 0. \quad (7.1)$$

Escribimos  $T = Df(z_0)$ . La aplicación  $T$ , como se sabe, se caracteriza por su matriz de orden  $2 \times 2$ , es decir, por *cuatro* números reales.

Si se tiene la propiedad (7.1), diremos que  $f$  es diferenciable en  $z_0$  en el sentido real. En el análisis complejo se usa otra definición más restrictiva de diferenciabilidad.

La mayoría de las siguientes nociones se conocen ya de los cursos de una y varias variables reales.

**Definiciones.** 1) Por un entorno de un punto  $z_0$  del plano complejo entendemos un disco abierto, centrado en  $z_0$ , de radio positivo.

2) Sea  $E$  un subconjunto de  $\mathbb{C}$ , y sea  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Decimos que  $z_0$  es un punto de acumulación de  $E$  si para todo entorno  $\mathcal{V}$  de  $z_0$  la intersección  $E \cap \mathcal{V}$  contiene al menos un punto, distinto de  $z_0$ .

Por ejemplo, 0 es un punto de acumulación del intervalo abierto  $(0, 1)$ , y 1 no es un punto de acumulación de  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

**Definición.** 3) Sea  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  una función, donde  $E \subset \mathbb{C}$ . Sea  $w_0 \in \mathbb{C}$  y sea  $z_0$  un punto de acumulación de  $E$ . Decimos que  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$  si para cualquier entorno  $\mathcal{W}$  de  $w_0$  existe un entorno  $\mathcal{V}$  de  $z_0$  tal que  $f(\mathcal{V} \setminus \{z_0\}) \subset \mathcal{W}$ .

Se tienen las propiedades usuales de los límites, tales como la unicidad y las fórmulas para los límites de la suma, del producto de funciones, etc. Es importante resaltar que podemos calcular el límite de una función  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  en un punto  $z_0$ , que no pertenece al conjunto  $E$ , pero es un punto de acumulación de  $E$ .

**Definiciones.** 4) Supongamos ahora que  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$ , donde  $E$  es un dominio. Decimos que  $f$  es continua en un punto  $z_0$  de  $E$  si  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ ; en particular, este límite tiene que existir.

5) Decimos que  $f$  es continua en  $E$  si es continua en todos puntos de  $E$ .

La suma y el producto de funciones continuas en un dominio es continuo. El cociente  $f/g$  de funciones continuas es continuo en todo punto  $z$  donde  $g(z) \neq 0$ . Las demostraciones de todas estas propiedades son las mismas que para el caso de funciones reales, y no las vamos a repetir.

La siguiente definición es muy importante.

**Definición.** La función  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  de variable compleja se llama holomorfa en  $z_0$  si existe un número complejo  $A$  tal que

$$\Delta f(z_0, h) = Ah + o(h), \quad h \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

donde ahora el producto  $Ah$  se entiende como un producto de dos números complejos. Si se cumple la condición (7.2), escribimos  $f'(z_0) = A$ .

Dadas dos funciones  $\varphi$  y  $\psi$  con valores complejos, definidas en un disco centrado en el origen, escribimos que  $\varphi(h) = o(\psi(h))$  cuando  $h \rightarrow 0$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(h)}{\psi(h)} = 0$ . Esta noción de “ $o$ ” pequeña tiene las mismas propiedades que para el caso de funciones reales.

Como en el caso de funciones de una variable real, tenemos una definición alternativa de holomorfa:  $f$  es holomorfa en  $z_0$  si existe un límite finito

$$f'(z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z_0, h)}{h}; \quad (7.3)$$

se entiende que  $h$  recorre valores complejos.

De forma equivalente, si se cumple (7.3), se dice que  $f$  es derivable en  $z_0$  en el sentido complejo.

**Teorema 7.1.** Sea  $f = u + iv : E \rightarrow \mathbb{C}$  una función compleja, definida sobre un dominio  $E$  y  $u, v$  sus partes real e imaginaria. Sea  $z_0$  un punto de  $E$ . Entonces  $f$  es holomorfa en  $z_0$  si y sólo si  $u$  y  $v$  son diferenciables en  $z_0$  y satisfacen las ecuaciones

$$u'_x(z_0) = v'_y(z_0), \quad u'_y(z_0) = -v'_x(z_0). \quad (7.4)$$

*Demostración.* Ponemos  $A = B + iC$ ,  $h = h_1 + ih_2$ , entonces se tiene

$$A \cdot h = (B + iC)(h_1 + ih_2) = (Bh_1 - Ch_2) + i(Ch_1 + Bh_2).$$

Por lo tanto, la aplicación lineal  $h \mapsto A \cdot h$ , interpretada como una aplicación de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^2$ , tiene la forma

$$\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \mapsto Df(z_0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}.$$

Ya que

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u'_x(z_0) & u'_y(z_0) \\ v'_x(z_0) & v'_y(z_0) \end{pmatrix},$$

al comparar las definiciones de derivabilidad real y compleja se obtiene que la aplicación lineal  $Df(z_0)$  tiene la forma  $h \mapsto A \cdot h$  para algún número complejo  $A$  si y sólo si se cumplen las condiciones (7.4).  $\square$

Las ecuaciones (7.4) fueron descubiertos por Euler y D'Alembert; se llaman *ecuaciones de Cauchy-Riemann*.

Se tienen las mismas reglas para el cálculo de derivadas de funciones de variable compleja con las mismas demostraciones.

**Teorema 7.2.** Sean  $f, g$  funciones derivables en  $z_0$ , y sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ . Entonces:

(1)  $\alpha f + \beta g$  es derivable en  $z_0$ , y se tiene

$$(\alpha f + \beta g)'(z_0) = \alpha f'(z_0) + \beta g'(z_0).$$

(2)  $fg$  es derivable en  $z_0$ , y

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

(3) Si  $g(z_0) \neq 0$ ,  $f/g$  es derivable en  $z_0$ , y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

**Teorema 7.3.** Si  $f$  es derivable en  $z_0$  y  $g$  es derivable en  $f(z_0)$ , entonces  $g \circ f$  es derivable en  $z_0$ , y se verifica la regla de la cadena:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

Podemos observar también que se tiene la misma propiedad para la composición de una función compleja, definida en un dominio, con una función compleja, definida en un intervalo real.

**Teorema 7.4.** Sea  $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva diferenciable en un punto  $t \in [a, b]$ , donde  $[a, b]$  es un intervalo real. Sea  $g$  una función holomorfa en  $\varphi(t)$ . Entonces  $g \circ \varphi$  es derivable en  $t$ , y se tiene que

$$(g \circ \varphi)'(t) = g'(\varphi(t)) \varphi'(t). \quad (7.5)$$

Como  $\varphi$  toma valores complejos, en esta fórmula  $\varphi'(t) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varphi(t+s) - \varphi(t)}{s}$  es, en general, un número complejo.

**Teorema 7.5.** Si  $f$  es derivable en  $z_0$ , entonces es continua en  $z_0$ .

Basta observar que la conclusión se cumple incluso si  $f$  sólo es derivable en  $z_0$  en el sentido real.  $\square$

Como consecuencia de estos teoremas, podemos afirmar que cualquier polinomio en  $z$

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$$

con coeficientes complejos es derivable en todo el plano complejo. Una función racional (es decir, un cociente de dos polinomios) es derivable en todo



punto que no es cero del denominador. Para comprobar la derivabilidad de la función  $\exp(z)$ , podemos comprobar directamente las condiciones de Cauchy-Riemann:

$$\exp(z) = u(z) + iv(z), \quad u(z) = e^x \cos(y), \quad v(z) = e^x \operatorname{sen}(y), \quad z = x + iy;$$

$$u'_x = e^x \cos(y) = v_y, \quad u'_y = -e^x \operatorname{sen}(y) = -v'_x.$$

A cambio, por ejemplo, poniendo  $f(z) = \bar{z} = u + iv$ , vemos que  $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -y$ , así que

$$u'_x = 1, \quad v'_y = -1.$$

Por lo tanto, *la función  $f(z) = \bar{z}$  no es derivable en ningún punto del plano complejo*. Las funciones  $\operatorname{Re} z$  y  $|z|$  tienen la misma propiedad. Es importante observar que las funciones  $\bar{z}$ ,  $\operatorname{Re} z$  son infinitamente derivables en el sentido real.

Haremos un comentario sobre el sentido geométrico de la derivada compleja. Suponiendo que existe  $f'(z_0) \neq 0$ , escribimos

$$\Delta f(z_0, h) = f(z_0) + f'(z_0)h + o(h), \quad h \rightarrow 0, \quad (7.6)$$

$$f'(z_0)h = e^{i \arg f'(z_0)} \cdot |f'(z_0)|h. \quad (7.7)$$

Estas fórmulas significan que la aplicación que lleva el incremento  $h = (z_0 + h) - z_0$  de la variable independiente en el incremento  $\Delta f(z_0, h) = f(z_0 + h) - f(z_0)$  de la función en la primera aproximación consiste en la dilatación  $|f'(z_0)|$  veces con la posterior rotación al ángulo  $\arg f'(z_0)$ . En particular, podemos afirmar que la función  $f$  conserva los ángulos entre las curvas que empiezan en  $z_0$ , mantiene la orientación del plano y que todas estas curvas se dilatan en un número igual de veces en  $z_0$  (es decir, en  $|f'(z_0)|$  veces).

**Definición.** Decimos que una función  $f$  es *holomorfa* en un dominio  $\Omega$  si es derivable en  $\Omega$  en el sentido complejo y su derivada  $f'$  es continua en  $\Omega$ .

Se puede demostrar que en realidad, la segunda condición es *redundante* y sigue automáticamente de la primera (ver, por ejemplo, [21, Capítulo 4]). Como en nuestro curso omitimos esta demostración, utilizaremos la definición que acabamos de dar.

Pasamos a estudiar la holomorfía de la función inversa. Primero vamos a recordar el resultado que se demuestra en el curso de Cálculo de varias variables reales.

**Teorema 7.6** (sobre la inversa local de una función en  $\mathbb{R}^n$ ). *Sea  $E$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y sea  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$ . Sea  $a \in E$  un punto tal que la matriz de Jacobi  $(Df)(a)$  es invertible. Entonces existen un entorno  $\mathcal{U}$  de  $a$  y  $\mathcal{V}$  de  $f(a)$  tales que*

- (1)  $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ , y  $f$  es una función uno a uno sobre  $\mathcal{U}$ ;
- (2)  $\det(Df)(p) \neq 0$  para todo punto  $p \in \mathcal{U}$ . La función inversa  $(f|\mathcal{U})^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es continuamente diferenciable, y

$$D(f|\mathcal{U})^{-1}(f(p)) = ((Df)(p))^{-1}, \quad p \in \mathcal{U}. \quad (7.8)$$

De aquí fácilmente se deduce el siguiente resultado.

**Teorema 7.7** (sobre la inversa local de una función holomorfa). *Sea  $E$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa. Sea  $a \in E$  un punto tal que  $f'(a) \neq 0$ . Entonces existen entornos  $\mathcal{U}$  de  $a$  y  $\mathcal{V}$  de  $f(a)$  tales que*

- (1)  $f(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$ , y  $f$  es una función uno a uno sobre  $\mathcal{U}$ ;
- (2)  $f'(a) \neq 0$  para todo punto  $x \in \mathcal{U}$ . La función inversa  $(f|\mathcal{U})^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$  es holomorfa en  $\mathcal{V}$ , y

$$(f|\mathcal{U})^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z), \quad z \in \mathcal{U}. \quad (7.9)$$

*Demostración.* Deduciremos este teorema del teorema anterior. Sea  $z$  cualquier punto del dominio  $E \subset \mathbb{C}$ . Denotamos  $f'(z) \stackrel{\text{def}}{=} B + iC$  (naturalmente,  $B$  y  $C$  dependen de  $z$ ). Entendiendo  $f$  a la vez como una función de dos variables reales, vemos que según la demostración del teorema 7.1,  $\det Df(z) = B^2 + C^2 = |f'(z)|^2$ . Por lo tanto,  $f'(z) \neq 0$  si y sólo si  $Df(z) \neq 0$ . En particular, vemos que el punto  $a$  cumple las hipótesis del Teorema 7.6. Sean  $\mathcal{U}$ ,  $\mathcal{V}$  los entornos de  $a$  y  $f(a)$ , cuya existencia se afirma en este teorema, entonces se cumple el apartado (1) del Teorema 7.7. Suponiendo que  $z \in \mathcal{U}$ , obtenemos que  $B + iC = f'(z) \neq 0$ . Por tanto,

$$\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} B_1 & -C_1 \\ C_1 & B_1 \end{pmatrix},$$

donde  $B_1 + iC_1 = \frac{B-iC}{B^2+C^2} = \frac{\overline{f'(z)}}{|f'(z)|^2} = \frac{1}{f'(z)}$ . De esta forma, el apartado (2) del Teorema 7.7 se sigue del apartado (2) del Teorema 7.6.  $\square$

**Teorema 7.8** (sobre la inversa global de una función holomorfa). *Sea  $E$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $f : E \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa e inyectiva. Entonces*

- (1)  $f' \neq 0$  en  $E$ ;
- (2)  $f(E)$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ ;

(3) La función inversa  $f^{-1}$  es holomorfa en  $f(E)$ , y

$$(f^{-1})'(f(z)) = 1/f'(z)$$

para todo  $z \in E$ .

Ahora nos faltan algunos ingredientes para deducir este teorema del Teorema 7.7. Daremos la demostración de este resultado más adelante, en la Sección 43.

Por razones metódicas, antes de demostrar el Teorema 7.8, lo vamos a aplicar en nuestro estudio de transformaciones conformes. Como el resto del curso no depende de este material, esto no presenta ningún problema de tipo lógico.

## 8. Logaritmos de números complejos. Ramas del argumento y ramas del logaritmo.

**Definición.** Sean  $z, w$  números complejos. Se dice que  $w$  es un valor del logaritmo de  $z$  si

$$e^w = z. \tag{8.1}$$

Es fácil encontrar una fórmula para encontrar todos los logaritmos de  $z$ . Para ello, ponemos  $w = u + iv$ . Entonces  $e^w = e^u e^{iv}$ , y (8.1) se reduce al sistema de dos ecuaciones

$$e^u = |z|, \quad v = \arg z \pmod{2\pi}.$$

Luego  $z$  no puede ser nulo y  $u = \log |z|$ . Obtenemos la fórmula

$$\log z = \log |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Por una rama de una función multiforme  $f$  definida sobre un subconjunto  $\mathcal{D}$  del plano complejo, entendemos una función  $\tilde{f}$ , definida sobre un subconjunto  $\tilde{\mathcal{D}}$  de  $\mathcal{D}$ , que es continua y tiene la siguiente propiedad: para todo  $z \in \tilde{\mathcal{D}}$ ,  $\tilde{f}(z)$  es uno de los valores de  $f(z)$ .

Vamos a ver cómo podemos definir las ramas del logaritmo y de la raíz  $n$ -ésima.

Sea  $\tau$  un número real fijo. La función  $w \mapsto \exp(w)$  es uno a uno sobre la banda horizontal

$$\Pi_\tau = \{w \in \mathbb{C} : \text{Im } w \in (\tau, \tau + 2\pi)\}$$

y envía este conjunto sobre

$$F_\tau = \mathbb{C} \setminus \{z = re^{i\tau} : r \geq 0\}$$

(el plano complejo menos un rayo). Según el Teorema 7.8, la función inversa a  $f|_{\Pi_\tau}$  es holomorfa sobre  $F_\tau$  (en particular, es continua). Está claro que  $(\exp|_{\Pi_\tau})^{-1}(z)$  es uno de los valores de  $\log(z)$ . Es decir, poniendo

$$(\text{Log } z)_\tau = (\exp|_{\Pi_\tau})^{-1}(z), \quad z \in F_\tau$$

obtenemos una de las ramas del logaritmo, definida en el sector  $F_\tau$ . Podemos definir también *la rama del argumento*  $\arg_\tau$  según la siguiente regla:  $\arg_\tau(z)$  está definido para todo  $z \in F_\tau$  y es el valor del argumento  $\arg z$  tal que

$$\tau < \arg_\tau(z) < \tau + 2\pi.$$

A veces se define también  $\arg_\tau(z)$  para valores de  $z$  de forma  $z = re^{i\tau}$ ,  $r > 0$ , poniendo  $\arg_\tau(re^{i\tau}) = \tau$ ,  $r > 0$ . Con ello elegimos el único valor del argumento para todo  $z \neq 0$ , que satisface

$$\tau \leq \arg_\tau(z) < \tau + 2\pi.$$

Se ve fácilmente que la función  $\arg_\tau$  no es continua en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , pero es continua en  $F_\tau$ . Como  $(\text{Log } z)_\tau$  toma sus valores en  $\Pi_\tau$ , se cumple la fórmula

$$(\text{Log } z)_\tau = \log |z| + i \arg_\tau(z), \quad z \in F_\tau. \quad (8.2)$$

La rama

$$\text{Log } z = (\text{Log } z)_{-\pi},$$

definida sobre  $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ , se llama *la rama principal de logaritmo*. Nótese que  $\text{Log } 1 = 0$ .

Las reglas del manejo con los logaritmos complejos, por lo general, son “peores” que para logaritmos reales. Por ejemplo,  $\exp((\text{Log } z)_\tau) = z$  para todo  $z \in F_\tau$  (por definición). Pero, por el contrario, la fórmula  $(\text{Log } \exp w)_\tau = w$  en general no se cumple, sólo se puede afirmar que

$$(\text{Log } \exp w)_\tau = w + 2\pi ik, \quad k = k(w) \in \mathbb{Z}.$$

De la misma forma, por ejemplo,

$$\text{Log}(z_1 z_2) = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 + 2\pi ik,$$

donde  $k \in \mathbb{Z}$  depende de  $z_1$  y  $z_2$  y, en general, no es nulo.

## 9. Ramas de raíces

Para todo  $\tau \in \mathbb{R}$ , la función

$$(\sqrt[n]{z})_\tau = \exp\left(\frac{(\operatorname{Log} z)_\tau}{n}\right)$$

es una rama holomorfa de la raíz  $n$ -ésima, definida sobre el sector  $\mathcal{F}_\tau$ . Efectivamente,

$$\left(\exp\frac{(\operatorname{Log} z)_\tau}{n}\right)^n = \exp((\operatorname{Log} z)_\tau) = z.$$

Para  $\tau = -\pi$ , obtenemos lo que se llama *la rama principal de la raíz  $n$ -ésima*.

## 10. Funciones armónicas

**Definición.** Sea  $G$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$ . Una función  $u$  se llama armónica en  $G$  si es de clase  $\mathcal{C}^2(G)$  y satisface

$$\Delta u \equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right) u = 0 \quad \text{en } G.$$

Recordamos que el operador diferencial  $\Delta$  se encuentra con frecuencia en ecuaciones de la Física Matemática. Por ejemplo,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

es la ecuación de propagación del calor ( $u = u(x, t)$  tiene el significado de la temperatura), y

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u$$

es la ecuación de ondas. La última ecuación describe, por ejemplo, la propagación del sonido en el aire; en este caso  $u$  es la variación de la presión.

En principio, las funciones armónicas pueden tomar valores complejos, pero a nosotros nos interesará sólo el caso en que toman valores reales. Nos ocuparemos del caso de funciones de dos variables.

**Lema 10.1.** *Sea  $f = u + iv$  una función holomorfa en un dominio  $G$ , donde  $u$  y  $v$  son las partes real e imaginaria de  $f$ . Si  $f$  es de clase  $\mathcal{C}^2(G)$ , entonces  $u$  y  $v$  son armónicas.*

*Demostración.* Según las ecuaciones de Cauchy–Riemann (7.4),

$$u''_{xx} = v''_{xy} = v''_{yx} = -u''_{yy},$$

es decir,  $\Delta u = 0$  en  $G$ . De la misma manera se comprueba que  $v$  es armónica.  $\square$

Más adelante demostraremos que cualquier función holomorfa es diferenciable en el sentido real (y en el sentido complejo) infinitas veces. Por lo tanto, la condición  $f \in \mathcal{C}^2(G)$  del lema en realidad no es necesaria.

**Definición.** Sea  $u$  una función armónica real en un dominio  $G$  en el plano complejo. Si  $f = u + iv$  es holomorfa en  $G$  y  $v$  es una función real en  $G$  de clase  $\mathcal{C}^2$ , entonces se dice que  $v$  es una función *armónica conjugada* de la función  $u$ .

Se ve fácilmente que si  $v(z)$  es una función armónica conjugada de la función  $u$  en un dominio  $G$ , entonces  $v(z) + C$  también lo es, para cualquier constante  $C$  real. Esta fórmula, de hecho, determina todas las funciones armónicas conjugadas de  $u$ .

Si  $v$  es una función armónica conjugada de  $u$ , entonces  $-u$  es una función armónica conjugada de  $v$ . Efectivamente, si  $f = u + iv$ , entonces  $-if = v - iu$ .

**Ejemplos.** 1)  $\exp z = u(z) + iv(z)$ , donde  $u(x + iy) = e^x \cos y$ ,  $v(x + iy) = e^x \sin y$ . Por lo tanto, la función  $e^x \sin y$  es una función armónica conjugada de la función  $e^x \cos y$ . En particular, ambas son armónicas.

2) Podemos elegir un sector  $F_\tau$  (ver §8), donde  $\tau$  es cualquier número real. En este sector está definida la rama  $\arg_\tau$  del argumento y la rama  $(\text{Log } z)_\tau$  del logaritmo. Están relacionados por la fórmula (8.2):

$$(\text{Log } z)_\tau = \log |z| + i \arg_\tau(z), \quad z \in F_\tau.$$

Por lo tanto, las funciones  $u(z) \stackrel{\text{def}}{=} \log |z|$  y  $v(z) \stackrel{\text{def}}{=} \arg_\tau(z)$  son armónicas en el sector  $F_\tau$ , y la segunda es una función armónica conjugada a la primera.

Es fácil ver que la función  $\log |z|$  es, de hecho, armónica en todo el plano complejo, salvo en el origen (donde no está definida). A cambio, no podemos prolongar la función  $v(z) = \arg_\tau(z)$  al dominio  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  de forma continua.

Se puede demostrar que no existe ninguna función armónica conjugada a la función  $\log |z|$  en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

## 11. Sucesiones y series con términos complejos

En la Sección 6, ya hemos definido la función exponencial y las funciones trigonométricas mediante series de potencias. Aquí haremos unas observaciones previas al estudio sistemático de series de potencias.

Hemos de precisar cómo se entiende la convergencia de las sucesiones y de las series complejas. Afortunadamente, aquí hay pocas diferencias con el caso real.

**Definición.** Una sucesión  $\{z_n\}$  de números complejos *converge a un número complejo*  $b$  si  $|z_n - b| \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Por tanto, la definición de la convergencia en  $\mathbb{C}$  es la misma que en  $\mathbb{R}^2$ . Se tiene que  $z_n \rightarrow b$  si y sólo si convergen las partes reales e imaginarias:  $\operatorname{Re} z_n \rightarrow \operatorname{Re} b$  y  $\operatorname{Im} z_n \rightarrow \operatorname{Im} b$ .

**Definición.** Se dice que  $s \in \mathbb{C}$  es la suma de una serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  con términos complejos si las sumas parciales  $s_n$  de la serie convergen a  $s$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

Recordamos que las sumas parciales de la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  se definen como

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Como vemos, las definiciones son las mismas que en el caso real. Los siguientes análogos de teoremas de la variable real serán los que más vamos a utilizar.

**Definición.** Se dice que la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  con términos complejos *converge absolutamente* si converge la serie compuesta de los módulos de  $a_k$ :

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty.$$

**Teorema 11.1.** Si la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge absolutamente, entonces esta serie converge y se tiene que

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

**Teorema 11.2.** Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  converge, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

El recíproco es falso.

Recordemos también la noción del límite superior de una sucesión **real**.  
 Dados  $t_n \in \mathbb{R}$ , se definen

$$T_n = \sup\{t_n, t_{n+1}, t_{n+2}, \dots\}, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim T_n.$$

Se ve que la sucesión  $\{T_n\}$  es decreciente, por tanto,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n$  siempre existe; es un número real ó bien es igual a  $-\infty$  o a  $+\infty$ . Es igual a  $+\infty$  si la sucesión  $\{t_n\}$  no está acotada superiormente; en este caso  $T_n = +\infty$  para todo  $n$ .

Se puede demostrar que siempre existe una subsucesión de la sucesión  $\{t_n\}$  cuyo límite es igual al límite superior de  $\{t_n\}$ ; es más, el límite superior de una sucesión es igual al *mayor* de los límites de sus subsucesiones.

Mencionaremos la siguiente propiedad:

$$\limsup(a_n b_n) = (\lim a_n)(\limsup b_n), \quad (11.1)$$

que se cumple si  $a_n \geq 0$  y  $\exists \lim a_n < \infty$ .

**Teorema 11.3** (Criterio de convergencia de Cauchy). *Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  una serie compleja. Sea*

$$C = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}. \quad (11.2)$$

*Si  $C > 1$ , entonces la serie diverge. Si  $0 \leq C < 1$ , entonces la serie converge absolutamente.*

**Teorema 11.4** (Criterio de convergencia de D'Alembert). *Sea  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  una serie compleja. Supongamos que existe el límite*

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}. \quad (11.3)$$

*Si  $D > 1$ , entonces la serie diverge. Si  $0 \leq D < 1$ , entonces la serie converge absolutamente.*

Hemos visto estos criterios para el caso real en el curso anterior del Cálculo. Las demostraciones se basan en los Teoremas 11.1 y 11.2 y se dejan como ejercicios.

En los casos  $C = 1$  o  $D = 1$ , la serie puede tanto converger como diverger.

Nótese que el límite (11.2), siendo un límite superior, siempre existe, mientras que el límite (11.3) puede que no exista.

Si el límite (11.3) existe, entonces  $C = D$ .

Los criterios de convergencia condicional, tales como el criterio de Dirichlet y el criterio de Abel, también siguen siendo ciertos para series complejas. Veremos la aplicación de estos criterios en ejercicios.



**Ejercicios.** Investigar la convergencia de las series

$$(a) \sum \frac{n}{(3i)^n}; \quad (b) \sum \frac{n!}{(in)^n}; \quad (c) \sum \frac{1}{e^{in}}; \quad (d) \sum \frac{1}{ne^{in}}.$$

Indicar los casos en que se tiene la convergencia absoluta.

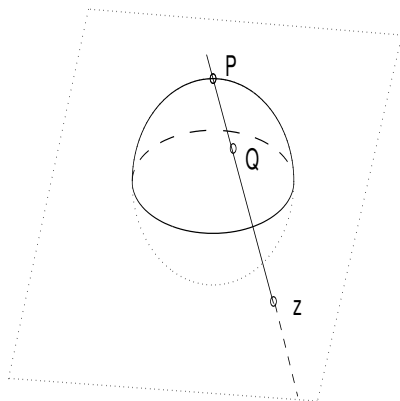
## 12. La esfera de Riemann y la proyección estereográfica

Interpretando el plano complejo  $\mathbb{C}$  como el plano euclídeo  $\mathbb{R}^2$ , podemos sumergirlo en  $\mathbb{R}^3$ . Utilizaremos coordenadas  $(x, y)$  en  $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$  y  $(\xi, \eta, \zeta)$  en  $\mathbb{R}^3$ ; suponemos que los ejes coordenados  $x, y$  en  $\mathbb{C}$  coinciden con los ejes  $\xi, \eta$  en  $\mathbb{R}^3$ , respectivamente.

**Definición.** La esfera de Riemann  $\mathbb{S}$  es la esfera unidad  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$  en el espacio  $\mathbb{R}^3$ .

Entendiendo que el tercer eje  $\zeta$  en  $\mathbb{R}^3$  mira hacia arriba, vemos que  $P \stackrel{\text{def}}{=} (0, 0, 1)$  es el polo norte de la esfera.

A cada punto  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  le corresponde un punto  $Q = Q(z) \neq P$  en la esfera de Riemann, que queda determinado por la intersección de la recta que pasa por  $P$  y  $z$  con la superficie esférica. Recíprocamente, a cada punto  $Q$  de la superficie esférica, distinto del polo norte, le corresponde exactamente un punto  $z$  en el plano  $xy$ , es decir, en el plano complejo.



La correspondencia así definida se llama *la proyección estereográfica*.

Podemos añadir al plano  $z$  *el punto del infinito*, denotándolo por  $\infty$ , que utilizaremos en el cálculo de límites. El plano complejo junto con este

punto se llama *el plano complejo ampliado* y se denota  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Si una sucesión de puntos  $z_n \in \mathbb{C}$  tiende al infinito en el sentido de que  $\lim |z_n| = +\infty$ , entonces los correspondientes puntos de la esfera  $\mathbb{S}$  tienden al polo norte. Por tanto, es natural ampliar la definición de la proyección estereográfica, *tomando el punto infinito del plano como la proyección del polo norte  $P$* .

Para cada  $\varepsilon > 0$ , los puntos del plano complejo exteriores a la circunferencia  $|z| = 1/\varepsilon$  corresponden a puntos de la esfera próximos a  $P$ . Por esa razón llamaremos el conjunto  $|z| > 1/\varepsilon$  un  $\varepsilon$ -entorno, o simplemente un entorno de  $\infty$ .

Ahora podemos dotar de significado la afirmación  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ , cuando  $z_0$  o  $w_0$ , o incluso ambos, se sustituyen por el punto del infinito. Para ello basta reemplazar los entornos de  $z_0$  y  $w_0$  en la definición del límite dada en Sección 7 por los entornos de  $\infty$ . Es fácil ver el siguiente resultado.

**Teorema 12.1.** *Si  $z_0$  y  $w_0$  son números complejos, entonces*

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \text{ si y sólo si } \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0;$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0 \text{ si y sólo si } \lim_{z \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0;$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty \text{ si y sólo si } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)} = 0. \quad \square$$

Cualquier función racional en  $\mathbb{C}$  tiene una extensión continua a  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Se puede demostrar que la proyección estereográfica tiene la llamada *propiedad homoclínica*: a las rectas y circunferencias en el plano complejo les corresponden circunferencias en la esfera de Riemann, y viceversa. Se puede ver también que la proyección estereográfica conserva los ángulos entre las curvas.

## 13. Un repaso de la convergencia uniforme

Aquí suponemos que  $A$  es un espacio métrico. Luego nos interesará el caso en que  $A$  es un subconjunto del plano complejo.

De hecho, nuestro propósito principal será el estudio de series de potencias en el contexto de la variable compleja.

**Definición.** Sean  $f_n, g$  funciones complejas definidas en  $A$ . 1) Decimos que  $f_n$  tienden a  $g$  *puntualmente* si para todo punto  $x \in A$ ,  $f_n(x) \rightarrow g(x)$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .

2) Decimos que  $f_n$  tienden a  $g$  *uniformemente* si para todo punto  $\varepsilon > 0$  existe un número natural  $N$  tal que

$$|f_n(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } x \text{ en } A \text{ y para todo } n > N.$$

Una definición equivalente a 2) es:  $f_n$  tienden a  $g$  uniformemente si

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - g(x)| \longrightarrow 0 \text{ cuando } n \rightarrow \infty. \quad (13.1)$$

**Ejemplo.** Sea  $A = \mathbb{R}$ , y sean las funciones  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Son funciones impares. Es fácil ver que

$$1) f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x)| = \frac{1}{2};$$

2) Tanto para  $x = 0$  como para cualquier  $x \neq 0$  fijo,  $f_n(x) \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Por tanto, poniendo  $g(x) \equiv 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , observamos que las funciones  $f_n$  tienden a  $g$  puntualmente en  $\mathbb{R}$ .

Sin embargo,  $\max_{x \in \mathbb{R}} |f_n(x) - g(x)| = \frac{1}{2} \neq 0$  para todo índice  $n$ . Comparando con (13.1), vemos que *funciones  $f_n$  no tienden a  $g$  uniformemente en  $\mathbb{R}$ .*

### Propiedades de la convergencia uniforme.

1) Un límite uniforme de funciones continuas en  $A$  es también una función continua en  $A$ ;

2) Sea  $A = [a, b]$  un intervalo. Supongamos que  $f_n$  tienden a  $g$  uniformemente sobre este intervalo y que  $f_n$  son integrables en el sentido de Riemann. Entonces  $g$  también lo es, y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx. \quad (13.2)$$

Cuando se cumple la última fórmula, se dice que *en la parte izquierda de (13.2) se puede intercambiar los signos del límite y la integral.*

Estas propiedades se suelen demostrar en el curso de variable real en el contexto en que  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 1$  y cuando las funciones toman valores reales. El caso de funciones complejas se reduce al caso real considerando las partes reales e imaginarias de las funciones.

**Ejercicio.** Sean  $f_n(x) = \frac{n^2x}{1+n^4x^4}$ .

- 1) Calcular  $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  para  $x \in [0, 1]$ ;
- 2) Examinar si  $f_n$  tienden uniformemente a  $g$  en el intervalo  $[0, 1]$ ;
- 3) Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{\pi}{4}$ ;
- 4) ¿ Se puede intercambiar intercambiar los signos del límite y la integral en la última igualdad?

**Definición.** Sea  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$  una serie de funciones complejas, definida sobre un espacio métrico  $A$ . Sean

$$s_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n(z)$$

las sumas parciales de esta serie. Decimos que nuestra serie converge *puntualmente* en  $A$  a una función  $g(z)$  si para todo punto  $z \in A$ , la suma parcial  $s_N(z)$  tiende a  $g(z)$  cuando el número  $N$  tiende al infinito. Decimos que nuestra serie converge a  $g(z)$  *uniformemente en  $A$*  si las sumas parciales  $s_N(z)$  tienden a  $g(z)$  uniformemente en  $A$ .

De esta forma, la convergencia uniforme de la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$  a la función  $g(z)$  en el conjunto  $A$  equivale a la afirmación

$$\sup_{z \in A} |s_N(z) - g(z)| \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

**Teorema 13.1** (criterio- $M$  de Weierstrass). *Si se tiene que  $|a_n(z)| \leq M_n$  para todo  $n \geq 0$  y todo  $z \in A$ , donde  $M_n$  son unas constantes, y la suma  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  es finita, entonces la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)$  converge absoluta y uniformemente en  $A$ .*

La demostración de este criterio no difiere del caso de funciones reales.

## 14. Series de potencias

**Definición.** Una serie de potencias centrada en  $z_0$  es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \tag{14.1}$$

donde los  $a_n$  son coeficientes complejos.

**Teorema 14.1.** *La serie (14.1)*

(a) *Converge absolutamente en el disco  $D(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$ , donde  $R$  viene dado por*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n}}; \tag{14.2}$$

(b) *Converge uniformemente en cada disco  $D(z_0, R')$ , para cualquier radio  $R' < R$ ;*

(c) *Diverge para todo  $z$  tal que  $|z - z_0| > R$ .*

*En la fórmula (14.2) ponemos  $R = 0$ , si  $\limsup |a_n|^{1/n} = +\infty$ , y  $R = +\infty$ , si  $\limsup |a_n|^{1/n} = 0$ .*

En vista de este resultado, el radio  $R$ , definido en (14.2), se llama *el radio de convergencia de la serie (14.1)*. El disco  $D(z_0, R)$  se llama *el disco de convergencia de la serie (14.1)*.

La fórmula (14.2) se llama *la fórmula de Hadamard*.

*Demostración.* Para demostrar la convergencia puntual, basta aplicar el criterio de Cauchy a la serie (14.1). En la demostración de la convergencia absoluta y la convergencia uniforme, se aplica el criterio- $M$  de Weierstrass.  $\square$

**Teorema 14.2.** *Si existe el límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$  (finito o infinito), entonces*

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

*y, por tanto, el radio de convergencia se determina de la fórmula*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$$

Este resultado se sigue de la igualdad  $C = D$ , que fue mencionada al final de la Sección 11.

## 15. Funciones elementales

Ya hemos definido las funciones exponencial y trigonométricas. Se definen también

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}, \quad \operatorname{cotanz} = \frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z}, \quad \operatorname{sec} z = \frac{1}{\operatorname{cos} z}, \quad \operatorname{cosec} z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Son holomorfas en todo  $\mathbb{C}$  salvo en los ceros de sus denominadores. Utilizando las definiciones (6.2) del seno y coseno, es sencillo obtener muchas de las relaciones conocidas para el caso  $z \in \mathbb{R}$ , por ejemplo,

$$\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1, \quad \operatorname{sen} 2z = 2 \operatorname{sen} z \operatorname{cos} z, \quad \operatorname{cos} 2z = \operatorname{cos}^2 z - \operatorname{sen}^2 z.$$

Podemos definir también funciones hiperbólicas de un argumento  $z$  complejo:

$$\begin{aligned} \operatorname{cosh} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}, & \operatorname{senh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \\ \operatorname{tanh} z &= \frac{\operatorname{senh} z}{\operatorname{cosh} z}, & \operatorname{cotanh} z &= \frac{\operatorname{cosh} z}{\operatorname{senh} z}, \\ \operatorname{sech} z &= \frac{1}{\operatorname{cosh} z}, & \operatorname{cosech} z &= \frac{1}{\operatorname{senh} z}. \end{aligned}$$

Las funciones  $\cosh z$  y  $\sinh z$  son holomorfas en todo el plano complejo. Las demás funciones hiperbólicas son holomorfas salvo en los ceros de los respectivos denominadores.

Según estas fórmulas, vemos que

$$\cosh z = \cos(iz), \quad \sinh z = -i \operatorname{sen}(iz),$$

lo que implica las relaciones

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad \sinh 2z = 2 \sinh z \cosh z, \quad \cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

**Ejercicio.** Determinar los conjuntos de ceros de funciones  $\operatorname{sen}$  y  $\operatorname{cos}$ .

Indicación: Utilizar las fórmulas de Euler (6.3).

# Capítulo II. Aspectos geométricos: transformaciones conformes.

En este capítulo damos la parte teórica del tema de transformaciones conformes. La aplicación del programa de MatLab, junto con algunos ejercicios adicionales, se discute en el Apéndice II.

## 16. El número de rotación de una curva

Por *una curva* en el plano complejo entendemos una aplicación continua  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{C}$ , donde  $[a, b]$  es un intervalo finito del eje real. Los puntos  $\gamma(a)$  y  $\gamma(b)$  se llaman *los extremos* de la curva  $\gamma$ , y la imagen  $\gamma([a, b])$  *el soporte* de la misma. En este curso, denotamos el soporte  $\gamma([a, b])$  de una curva  $\gamma$  por la misma letra. Sin embargo, entendemos que cuando hablamos sobre una curva, está fijado no sólo el soporte de esta curva, sino también su parametrización. Por ejemplo, las curvas  $\gamma_1(t) = it$ ,  $t \in [0, 1]$ , y  $\gamma_2(t) = i(1 - t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , son diferentes.

La curva  $\gamma$  se llama *simple* si no tiene intersección consigo mismo; esto es,  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  siempre que  $t_1 \neq t_2$ . Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  es inyectiva, pero  $\gamma(a) = \gamma(b)$ , se dice que  $\gamma$  es una *curva cerrada simple* o una *curva de Jordan*.

A continuación, definimos el número de rotación de una curva  $\gamma$  respecto de un punto  $\alpha$  que no le pertenece.

**Definiciones.** Fijemos un punto  $\alpha$  del plano complejo  $\mathbb{C}$ .

1) Decimos que la curva  $\gamma$  es *pequeña* (respecto de  $\alpha$ ) si existe un rayo  $R(\alpha, \theta) = \{\alpha + re^{i\theta} : r \geq 0\}$  que parte de  $\alpha$  y no se interseca con  $\gamma$ . En particular, se tiene que satisfacer que  $\alpha \notin \gamma$ .

2) Si la curva  $\gamma$  es pequeña respecto de  $\alpha$ , definimos *el número de rotación de  $\gamma$  respecto del punto  $\alpha$*  como

$$\text{rotac}_\gamma(\alpha) := \frac{1}{2\pi} (\arg_\theta(\gamma(b) - \alpha) - \arg_\theta(\gamma(a) - \alpha)),$$

donde  $R(\alpha, \theta)$  es el rayo que no se interseca con  $\gamma$ .

Está claro que la definición no depende de la elección del ángulo  $\theta$ . Si  $\gamma$  es un arco pequeño (respecto de  $\alpha$ ), también lo es cualquier subarco de  $\gamma$ . Si dividimos el intervalo de parametrización  $[a, b]$  en  $N$  subintervalos:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

e introducimos los subarcos  $\gamma_j = \gamma|_{[t_{j-1}, t_j]}$  de  $\gamma$ ,  $1 \leq j \leq N$ , se ve que

$$\text{rotac}_\gamma(\alpha) = \sum_{j=1}^N \text{rotac}_{\gamma_j}(\alpha)$$

(basta escoger el mismo ángulo  $\theta$  en la última definición para todos estos arcos).

**Definición (2).** Supongamos que el punto  $\alpha$  no está en la curva  $\gamma$ , pero que  $\gamma$  no es necesariamente un arco pequeño respecto de  $\alpha$ . Entonces es posible dividir  $\gamma$  en unos subarcos  $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ , que son pequeños respecto del punto  $\alpha$ . Definimos  $\text{rotac}_\gamma(\alpha)$  por la fórmula

$$\text{rotac}_\gamma(\alpha) = \sum_{j=1}^M \text{rotac}_{\gamma_j}(\alpha). \quad (16.1)$$

Hay muchas formas de dividir un arco  $\gamma$  en subarcos pequeños. Para ver que nuestra definición es correcta, tenemos que comprobar que el número  $\text{rotac}_\gamma(\alpha)$ , definido en (16.1), no va a depender de esta subdivisión.

Supongamos que

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_M = b, \quad a = s_0 < s_1 < \dots < s_K = b \quad (16.2)$$

son dos divisiones de  $[a, b]$  en subintervalos, que dan lugar a dos distintas divisiones de  $\gamma$  en arcos pequeños:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_M = \tilde{\gamma}_1 \cup \dots \cup \tilde{\gamma}_K. \quad (16.3)$$

Uniendo los conjuntos de puntos  $\{t_j\}$  y  $\{s_k\}$ , podemos formar una subdivisión común de las divisiones (16.2). Le corresponde una división de la curva  $\gamma$  en subarcos  $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_L$ , que es más fina que ambas divisiones en (16.3). Entonces

$$\sum_{j=1}^M \text{rotac}_{\gamma_j}(\alpha) = \sum_{j=1}^L \text{rotac}_{\hat{\gamma}_j}(\alpha) = \sum_{j=1}^K \text{rotac}_{\tilde{\gamma}_j}(\alpha).$$

Esto demuestra que la definición (16.1) del número de rotación es correcta.

*Observación.* Si  $\gamma_j$  es un arco pequeño con extremos en  $\gamma_j(t_{j-1})$  y  $\gamma_j(t_j)$ , está claro que para cualquier ángulo  $\theta$ ,

$$2\pi \text{rotac}_{\gamma_j}(\alpha) \equiv \arg_\theta \gamma_j(t_j) - \arg_\theta \gamma_j(t_{j-1}) \pmod{2\pi}$$

Sumando estas relaciones y dividiendo por  $2\pi$ , vemos que para cualquier curva *cerrada*  $\gamma$  y para cualquier  $\alpha \notin \gamma$ , el número de rotación de  $\gamma$  respecto de  $\alpha$  es un *número entero*.

Es fácil ver lo siguiente:



**Proposición 16.1.** Para cualquier curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  y cualquier  $\lambda \notin \gamma$  fijo, la función  $t \mapsto \text{rotac}_{\gamma|_{[a,t]}}(\lambda)$ ,  $t \in [a, b]$  es una determinación continua del argumento a lo largo de  $\gamma$  en el siguiente sentido: esta función es continua y cumple

$$2\pi \text{rotac}_{\gamma|_{[a,t]}}(\lambda) \equiv \arg(\gamma(t) - \lambda) - \arg(\gamma(a) - \lambda) \pmod{2\pi}$$

para todo  $t \in [a, b]$ .

## 17. El Teorema de Jordan

**Proposición 17.1.** 1) Supongamos que  $\gamma$  es un arco pequeño respecto de un punto  $\alpha_0$  en el plano. Entonces existe un entorno  $\mathcal{W}$  de  $\alpha_0$ , que no se interseca con  $\gamma$  y tal que  $\gamma$  es un arco pequeño respecto de cualquier punto  $z$  en  $\mathcal{W}$ ; además,  $\text{rotac}_{\gamma}(z)$  depende continuamente del punto  $z$  en  $\mathcal{W}$ .

2) Para cualquier curva  $\gamma$ , la función  $\text{rotac}_{\gamma}(z)$  es continua en  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ .

Si  $\gamma$  es una curva cerrada en el plano complejo y  $z \notin \gamma$ , el número  $\text{rotac}_{\gamma}(z)$  sólo puede tomar valores enteros. Podemos poner

$$\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} \setminus \gamma : \text{rotac}_{\gamma}(z) = n\}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (17.1)$$

Según la última Proposición, todos estos conjuntos son abiertos.

**Teorema 17.2** (Jordan). Sea  $\gamma$  una curva simple cerrada en el plano complejo. Definimos conjuntos abiertos  $\Omega_n$  por la fórmula (17.1). Entonces se cumple lo siguiente.

a) Todo conjunto  $\Omega_n$  es vacío, salvo dos, que son ó bien  $\Omega_0$  y  $\Omega_1$ , ó bien  $\Omega_0$  y  $\Omega_{-1}$ ;

b) Estos dos conjuntos  $\Omega_n$  no vacíos son conexos. La frontera de cada uno de estos dos conjuntos coincide con la curva  $\gamma$ ;

c)  $\Omega_0$  es no acotado y los demás  $\Omega_n$ ,  $n \neq 0$  son acotados.

Este teorema se demuestra, por ejemplo, en Lefschetz [14] y en Kosniowsky [15]. En el Apéndice I el lector puede encontrar una demostración para el caso de curvas diferenciables a trozos.

**Definiciones.** 1) Si  $\Omega_1 \neq \emptyset$  y  $\Omega_{-1} = \emptyset$ , se dice que la curva  $\gamma$  tiene orientación positiva. Si  $\Omega_1 = \emptyset$  y  $\Omega_{-1} \neq \emptyset$ , se dice que la curva  $\gamma$  tiene orientación negativa.

2) El conjunto  $\Omega_0$  se llama *el exterior* de la curva  $\gamma$ . El otro conjunto no vacío (es decir,  $\Omega_1$  ó  $\Omega_{-1}$ ) se llama *el interior* de  $\gamma$ ; este conjunto está acotado.

Llamamos *envolvente convexa*  $\text{co}(\gamma)$  de  $\gamma$  al menor conjunto convexo en  $\mathbb{C}$  que contiene a  $\gamma$ , es decir, la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a  $\gamma$ . Se puede ver que *la envolvente convexa de  $\gamma$  contiene al interior de  $\gamma$* .<sup>2</sup>

La siguiente definición es muy importante para el curso.

**Definición.** Sea  $G$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Decimos que  $G$  es *simplemente conexo* si para toda curva de Jordan  $\gamma$  contenida en  $G$ , el interior de  $\gamma$  también está contenido en  $G$ .

Cualquier dominio convexo  $G$  es simplemente conexo. Efectivamente, para toda curva  $\gamma$  de Jordan contenida en  $G$ , su envolvente convexa  $\text{co}(\gamma)$  está contenida en  $G$ , y el interior de  $\gamma$  está contenido en  $\text{co}(\gamma)$ .

Se puede demostrar sin dificultad la siguiente propiedad: *Sean  $\gamma$  y  $\delta$  dos curvas de Jordan que no se intersecan. Si  $\delta$  está contenida en el interior de  $\gamma$ , entonces  $\gamma$  está contenida en el exterior de  $\delta$* .<sup>3</sup> Por lo tanto, evidentemente,  $\gamma$  no interseca al interior de  $\delta$ , lo que implica que el interior de  $\delta$  está contenido enteramente en el exterior de  $\gamma$  o en el interior de  $\gamma$ . Como existen puntos en el interior de la curva  $\delta$  que tienden a un punto de  $\delta$ , concluimos que el interior de  $\delta$  está contenido en el interior de  $\gamma$ . Esto demuestra que *el interior de cualquier curva de Jordan es un dominio simplemente conexo*.

## 18. La relación entre la existencia de las ramas del logaritmo en un dominio y su topología

En este apartado, discutimos la siguiente pregunta: *¿en qué dominios en el plano existe una rama del logaritmo?* Como antes, hablando de una rama de una función multiforme, entendemos que esta rama ha de ser continua.

---

<sup>2</sup>Para demostrarlo, podemos observar primero que para todo punto  $p$  fuera de  $\text{co}(\gamma)$ , existe una recta que pasa por  $p$  y no se interseca con  $\text{co}(\gamma)$ . Esta recta no es acotada; por lo tanto, está contenida en el exterior de  $\gamma$ .

<sup>3</sup>Efectivamente, es fácil encontrar una curva continua  $\varphi : [t_0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$  tal que  $\varphi(t_0) \in \delta$ ,  $\varphi(t) \notin \delta$  para todo  $t > t_0$ , y  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \infty$ . Entonces existe un parámetro  $t > t_0$  tal que  $\varphi(t) \in \gamma$ ; es más, existe el número  $t$  *más grande* con la última propiedad. Luego  $\varphi(s)$  está en el exterior de  $\delta$  para todo  $s > t$ , lo que implica que  $\varphi(t)$  está en el exterior de  $\delta$ . Por consiguiente, toda la curva  $\gamma$  está contenida en el exterior de  $\delta$ .

Observemos primero que *cualquier rama del logaritmo en un dominio  $G$  es holomorfa*. Para demostrarlo, basta aplicar el Teorema sobre la inversa local de una función holomorfa a la función exponencial.

Como la función  $\exp$  no se anula en  $\mathbb{C}$ , no se puede asignar ningún valor a  $\log 0$ . Por lo tanto, sólo consideraremos dominios  $G$  que no contienen el origen.

El conjunto de todos los valores del logaritmo de un número  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 0$ , viene dado por la fórmula

$$\log z = \log |z| + i \arg z \pmod{2\pi i}.$$

Esto implica que en un dominio existe una rama del logaritmo si y sólo si existe una rama continua del argumento en este dominio.

Como hemos visto en la Sección 8, si quitamos al plano complejo  $\mathbb{C}$  cualquier rayo  $\{z = re^{i\tau} : r \geq 0\}$ , en el resto va a existir una rama del logaritmo.

**Lema 18.1.** *No existe una rama (continua) del logaritmo en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*

*Demostración.* Nos basamos en la siguiente observación, cuya comprobación se deja al lector: *si en un dominio  $G$  existe una rama del argumento (que llamaremos  $\arg_G$ ) y  $\gamma$  es una curva contenida en  $G$  con extremos  $\alpha, \beta$ , entonces*

$$2\pi \operatorname{rotac}_\gamma(0) = \arg_G(\beta) - \arg_G(\alpha).$$

Para demostrar esto, se puede utilizar la Proposición 16.1 y el hecho de que cualquier función continua en un intervalo  $[a, b]$  que toma valores enteros es una constante.

Ponemos ahora  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Si existiese una rama del logaritmo en  $G \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , entonces existiría también una rama continua del argumento en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . En este caso, la última igualdad conduce a que

$$2\pi = \operatorname{rotac}_\gamma(0) = \arg_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}(\beta) - \arg_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}(\alpha) = 0,$$

porque  $\alpha = \gamma(0) = \gamma(2\pi) = \beta = 1$ . Esta contradicción nos dice que en realidad no existe una rama continua  $\arg_{\mathbb{C} \setminus \{0\}}$  del argumento en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  $\square$

El mismo razonamiento implica que *no existen ramas continuas del argumento y de logaritmo en cualquier dominio que contiene una curva de Jordan tal que el origen está en su interior*.

## 19. Propiedades generales de transformaciones conformes. Transformaciones de Möbius

Sea  $\Omega$  un dominio en el plano complejo extendido  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Definimos *el mapa  $\mu$  en el infinito*, poniendo  $\mu(z) = 1/z$ ,  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $\mu(\infty) = 0$ ,  $\mu(0) = \infty$ .

Supongamos que  $f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una aplicación. Vamos a extender la noción de holomorfa a los siguientes casos:

**Definición.** 1) Sea  $f(\infty) = \alpha \neq \infty$ . Decimos que  $f$  es holomorfa en un entorno de infinito (en el sentido extendido) si  $f \circ \mu$  es holomorfa en un entorno de 0;

2) Sea  $f(\alpha) = \infty$ ,  $\alpha \neq \infty$ . Decimos que  $f$  es holomorfa en un entorno de  $\alpha$  si  $\mu \circ f$  es holomorfa en un entorno de 0;

3) Sea  $f(\infty) = \infty$ . Decimos que  $f$  es holomorfa en un entorno de  $\infty$  si  $\mu \circ f \circ \mu$  es holomorfa en un entorno de 0.

La función  $f$  se llama *univalente en  $\Omega$*  si es inyectiva, es decir, si  $f(z_1) \neq f(z_2)$  para cualquier par de puntos  $z_1 \neq z_2$  en  $\Omega$ .

**Definición.** Sea  $f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una aplicación, donde  $\Omega$ , como antes, es un dominio en  $\widehat{\mathbb{C}}$ . La función  $f$  se llama *conforme* si  $f$  es holomorfa y univalente en  $\Omega$ .

Si  $f : \Omega \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es una transformación conforme y la imagen  $f(\Omega)$  es un dominio  $\Omega'$ , se dice que  $f$  es *una transformación conforme de  $\Omega$  sobre  $\Omega'$* . Según el Teorema 7.8, la imagen  $f(\Omega)$  siempre va a ser un dominio en el plano complejo extendido.

**Ejemplos.** 1) La transformación racional lineal  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ , donde  $a, b, c, d$  son constantes complejas y el determinante  $ad - bc$  no es nulo, es una transformación conforme de  $\widehat{\mathbb{C}}$  a  $\widehat{\mathbb{C}}$ . Se llama también *una transformación de Möbius*.

2) La transformación  $f(z) = e^z$  es conforme en cualquier banda horizontal

$$b < \operatorname{Im} z < b + 2\pi.$$

3) Si  $n \geq 1$  es un número natural, entonces la transformación  $f(z) = z^n$  es holomorfa en  $\mathbb{C}$ , pero no es conforme en ningún entorno de 0.

### Propiedades geométricas de las transformaciones conformes

Según el Teorema 7.8, si  $f$  es conforme y  $\alpha \in \Omega$ ,  $\alpha \neq \infty$ ,  $f(\alpha) \neq \infty$ , entonces  $f'(\alpha)$  no puede anularse. Utilizando las propiedades establecidas en la Sección 7, obtenemos las siguientes afirmaciones:

- 1) Las transformaciones conformes conservan los ángulos entre las curvas.
- 2) Las transformaciones conformes conservan la orientación del plano.
- 3) Sea  $G$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ , y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función conforme. Para todo  $z_0 \in G$ , la aplicación que lleva el incremento  $h = (z_0 + h) - z_0$  de la variable independiente en el incremento  $\Delta f(z_0, h) = f(z_0 + h) - f(z_0)$  de la función consiste, en la primera aproximación, en dilatar el vector  $h$   $|f'(z_0)|$  veces ( $h \mapsto |f'(z_0)| h$ ), girándolo posteriormente al ángulo  $\arg f'(z_0)$ :

$$|f'(z_0)| h \mapsto e^{i \arg f'(z_0)} |f'(z_0)| h = f'(z_0) h.$$

Toda curva que pasa por  $z_0$  se dilata en el punto  $z_0$   $|f'(z_0)|$  veces.

Una transformación conforme  $f$  también conserva los ángulos en el punto infinito y en puntos cuya imagen es infinito. Entendemos por ángulo entre dos curvas que salen del infinito el ángulo entre sus imágenes en la esfera de Riemann.

Las siguientes tres propiedades se siguen de los teoremas sobre la holomorfía de la composición y la versión global de la función inversa:

- 4) La composición de transformaciones conformes es conforme;
- 5) La imagen de un dominio por una transformación conforme es un dominio;
- 6) La función inversa a una función conforme es conforme.

Denotaremos por

$$\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$$

el disco unidad *abierto*.

El siguiente teorema se demostrará en el curso “Variable Compleja II”.

**Teorema 19.1** (Bernhard Riemann (1826–1866)). *Sea  $G$  un dominio simplemente conexo en el plano complejo extendido  $\widehat{\mathbb{C}}$  tal que su complemento  $\mathbb{C} \setminus G$  tiene más de un punto. Entonces*

1) *Existe una transformación conforme  $\varphi$  que lleva el disco unidad  $\mathbb{D}$  exactamente en  $G$ ;*

2) *Fijados dos puntos  $z_0 \in \mathbb{D}$  y  $w_0 \in G$ ,  $w_0 \neq \infty$  y un ángulo  $\theta \in \mathbb{R}$ , existe una única transformación  $\varphi$  que lleva  $\mathbb{D}$  en  $G$  y satisface las condiciones*

$$\varphi(z_0) = w_0, \quad \arg \varphi'(z_0) = \theta \pmod{2\pi}.$$

La transformación  $\varphi$  que lleva  $\mathbb{D}$  en  $G$  se llama *la aplicación de Riemann del dominio  $G$* .

**Corolario.** Para dos dominios  $G_1, G_2$  simplemente conexos cualesquiera en la esfera de Riemann que no sean la esfera de Riemann ni la esfera de Riemann sin un punto existe una transformación conforme  $\varphi$  que lleva  $G_1$  en  $G_2$ .

Para demostrarlo, basta poner  $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ , donde  $\varphi_1, \varphi_2$  son aplicaciones de Riemann que llevan  $\mathbb{D}$  en  $G_1, G_2$ , respectivamente.

El siguiente resultado es también bastante difícil y no se va a demostrar aquí.

**Teorema 19.2** (Constantin Carathéodory (1873–1950)). Sea  $\gamma$  una curva de Jordan y sea  $G$  su interior. Entonces la aplicación de Riemann  $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow G$  se extiende continuamente a una aplicación biyectiva  $\widehat{\varphi} : \text{clos } \mathbb{D} \rightarrow \text{clos } G$ . Esta extensión satisface la fórmula de correspondencia de fronteras:  $\widehat{\varphi}(\partial\mathbb{D}) = \partial G$ .

Uno de nuestros principales objetivos será aprender a hallar explícitamente las transformaciones que llevan unos dominios concretos a otros. Estudiamos ciertos tipos de dominios, acotados por rectas y curvas de segundo grado. Este tema es importante en muchas aplicaciones, tales como la teorías de calor, de elasticidad, hidrodinámica y aerodinámica.

## 19.1. La inversión y las transformaciones de Möbius

**Lema 19.3.** Las transformaciones  $z \rightarrow \frac{R^2}{\bar{z}}$ ,  $z \rightarrow \frac{R^2}{z}$  llevan circunferencias y rectas en circunferencias y rectas.

*Demostración.* Primero consideramos la transformación  $z \mapsto w \stackrel{\text{def}}{=} \frac{R^2}{z}$ . La ecuación de una circunferencia en el plano  $z$  es

$$(z - a)(\bar{z} - \bar{a}) = A, \quad (19.1)$$

donde  $a$  es el centro y  $\sqrt{A}$  es el radio. La reescribimos como

$$\alpha|z|^2 - a\bar{z} - \bar{a}z - \beta = 0.$$

La última ecuación también puede representar una recta, si  $\alpha = 0$ . Se ve que, sustituyendo  $z = \frac{R^2}{w}$  en esta ecuación, se obtiene una ecuación en  $w$  de la misma forma, digamos,  $\alpha'|w|^2 - a'\bar{w} - \bar{a}'w - \beta' = 0$ . Si  $\alpha' = 0$ , es una recta. En caso contrario, podemos escribir la última ecuación en la forma (19.1), con un nuevo  $A'$  real. Como el conjunto inicial (la circunferencia o la recta) no era vacío, tampoco lo será su imagen en el plano  $w$ . Por lo tanto,  $A' > 0$ , es decir, se obtiene una circunferencia en el plano  $w$ .

La aplicación  $z \mapsto \frac{R^2}{\bar{z}}$  es la composición de aplicaciones  $z \rightarrow \bar{z}$  y  $z \mapsto \frac{R^2}{z}$ , por tanto, tiene la misma propiedad.  $\square$

**Corolario.** *Cualquier transformación de Möbius lleva circunferencias y rectas en circunferencias y rectas.*

Basta escribir

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} - \frac{ad - bc}{c(cz + d)},$$

con lo cual se ve que  $f(z)$  se representa como una composición de traslaciones, dilataciones y la aplicación  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .  $\square$

**Definición.** La aplicación (no holomorfa)  $\psi_R(z) = \frac{R^2}{\bar{z}}$  se llama *una inversión respecto de la circunferencia  $|z| = R$* .

Es una transformación *anticonforme* en el sentido de que conserva los ángulos entre las curvas, pero invierte la orientación del plano (y de la esfera de Riemann).

Está claro que todo punto de la circunferencia  $|z| = R$  es invariante por la transformación  $\psi_R$ . Además,  $\psi_R \circ \psi_R(z) = z$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ . La transformación  $\psi_R$  lleva el interior de la circunferencia  $|z| = R$  en el exterior y el exterior en el interior.

Ponemos

$$\psi_R(0) = \infty, \quad \psi_R(\infty) = 0,$$

con lo cual obtenemos una aplicación de la esfera de Riemann  $\mathbb{S}$  sobre sí misma.

Decimos que dos puntos  $z_1, z_2$  del plano son *simétricos respecto de la circunferencia  $|z| = R$*  si  $\psi_R(z_1) = z_2$ . Geométricamente,  $z_1, z_2$  son simétricos respecto de la circunferencia  $\mathcal{C}(0, R) \stackrel{\text{def}}{=} \{z : |z| = R\}$  si están en el mismo rayo que sale del origen y el producto  $|z_1| \cdot |z_2|$  de sus distancias al origen es igual a  $R^2$ .

Podemos definir la simetría de puntos  $z_1$  y  $z_2$  respecto de una circunferencia arbitraria  $\mathcal{C}$  en  $\mathbb{C}$  de la misma forma geométrica:  $z_1, z_2$  tienen que estar en el mismo rayo saliendo del centro  $a$  de  $\mathcal{C}$  y satisfacer

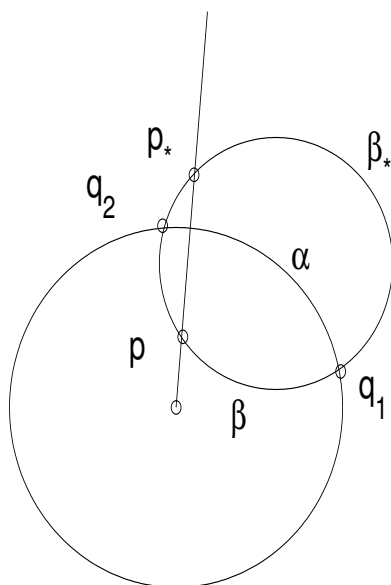
$$|z_1 - a| \cdot |z_2 - a| = R^2,$$

donde  $R$  es el radio de  $\mathcal{C}$ . Podemos afirmar que, según esta definición,

1) Si  $z_1$  es simétrico a  $z_2$  respecto de  $\mathcal{C}$ , entonces  $z_2$  es simétrica a  $z_1$  respecto de  $\mathcal{C}$ ;

2) Un punto es simétrico a sí mismo respecto de  $\mathcal{C}$  si y sólo si está en  $\mathcal{C}$ .

Decimos también que el punto simétrico a  $\infty$  respecto de una circunferencia es su centro.



**Lema 19.4.** Sean  $p$  y  $p_*$  puntos simétricos respecto de una circunferencia  $\mathcal{C}$ , que no le pertenecen. Supongamos que una circunferencia  $\mathcal{C}'$  pasa por ambos puntos  $p, p_*$ . Entonces las circunferencias  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  son ortogonales en los puntos de intersección entre ellas.

*Demostración.* Sean  $q_1, q_2$  los puntos de intersección de  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ .

Como existe sólo una circunferencia pasando por  $q_1, q_2, p, p_*$ , está claro que la simetría respecto de  $\mathcal{C}$  lleva la circunferencia  $\mathcal{C}'$  en sí misma.

Sea  $\alpha$  uno de los subarcos de  $\mathcal{C}$ , cuyos extremos son  $q_1$  y  $q_2$ . Sea  $\beta$  uno de los subarcos de  $\mathcal{C}'$  con los extremos  $q_1, p$ , y sea  $\beta_*$  el subarco de  $\mathcal{C}'$ , que es simétrico a  $\beta$  respecto de  $\mathcal{C}$ . Los extremos de  $\beta_*$  son  $q_1$  y  $p_*$ .

La simetría respecto de  $\mathcal{C}$  lleva los puntos de  $\alpha$  en sí mismos y lleva  $\beta$  en  $\beta_*$ . Por lo tanto, el ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  en  $q_1$  es igual al ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta_*$  en  $q_1$ , es decir, los dos ángulos son iguales a  $\pi/2$ .  $\square$

**Corolario.** Sea  $T$  una transformación de Möbius,  $\mathcal{C}$  una circunferencia o recta y  $a$  y  $b$  unos puntos simétricos respecto de  $\mathcal{C}$ . Entonces  $T(a)$  y  $T(b)$  son simétricos respecto de la circunferencia (o recta)  $T(\mathcal{C})$ .

*Demostración.* Entenderemos por “circunferencia” una circunferencia o una recta. Es fácil ver que hay un número infinito de circunferencias que son ortogonales a la circunferencia  $\mathcal{C}$  (en los puntos de intersección con  $\mathcal{C}$ ) y pasan por los puntos  $a$  y  $b$ . Estos puntos son los únicos puntos de intersección de todas estas circunferencias. Aplicando la transformación  $T$  a este dibujo, deducimos que hay un número infinito de circunferencias que son ortogonales a la



circunferencia  $T(\mathcal{C})$  y pasan por  $T(a)$  y  $T(b)$ . Como  $T(a)$  y  $T(b)$  son los únicos puntos comunes de todas estas circunferencias, tienen que ser simétricos respecto de  $T(\mathcal{C})$ .  $\square$

A continuación, consideramos algunos problemas típicos sobre las transformaciones de Möbius.

**Problema 1.** Sean  $(z_0, z_1, z_2)$  y  $(w_0, w_1, w_2)$  dos triplas de puntos en el plano complejo extendido  $\widehat{\mathbb{C}}$  tales que todos los  $z_j$  son distintos y todos los  $w_j$  son distintos. Encontrar una aplicación de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

tal que

$$\varphi(z_j) = w_j, \quad j = 0, 1, 2. \quad (19.2)$$

Como veremos, *este problema siempre tiene una única solución.*

**Caso particular del Problema.** Supongamos primero que

$$w_0 = 0, \quad w_1 = 1, \quad w_2 = \infty.$$

Vamos a exigir primero sólo que  $\varphi(z_0) = 0$ ,  $\varphi(z_2) = \infty$ . Entonces  $b/a = -z_0$ ,  $c/d = -z_2$ . Por lo tanto,  $\varphi(z) = \alpha \frac{z - z_0}{z - z_2}$ , donde  $\alpha \in \mathbb{C}$  es una constante. La tercera condición  $\varphi(z_1) = 1$  determina el coeficiente  $\alpha$  de una forma única:

$$\varphi(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2} : \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2}. \quad (19.3)$$

En el caso en que uno de los puntos  $z_j$  es infinito, esta fórmula tiene que ser modificada. Por ejemplo, la solución del problema para  $z_0 = \infty$  se obtiene pasando al límite  $z_0 \rightarrow \infty$  en la última fórmula. Es decir, en este caso la solución es

$$\varphi(z) = \frac{z_1 - z_2}{z - z_2} \quad (z_0 = \infty).$$

**El caso general del Problema** se reduce al caso particular. Sean  $(z_0, z_1, z_2)$  y  $(w_0, w_1, w_2)$  dos triplas arbitrarias, con la condición que se pide en el enunciado del problema. Sean  $t = \eta(z)$ ,  $t = \rho(w)$  las transformaciones de Möbius que resuelven los siguientes problemas del tipo ya estudiado

$$\eta : (z_0, z_1, z_2) \mapsto (0, 1, \infty), \quad \rho : (w_0, w_1, w_2) \mapsto (0, 1, \infty).$$

Entonces

$$\eta(z) = \frac{z - z_0}{z - z_2} : \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2}, \quad \rho(w) = \frac{w - w_0}{w - w_2} : \frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_2}.$$

La transformación

$$\varphi : (z_0, z_1, z_2) \mapsto (w_0, w_1, w_2)$$

que se busca se obtiene como la composición

$$\varphi(z) = \rho^{-1}(\eta(z)),$$

donde  $\rho^{-1}$  es la función inversa a  $\rho$ . Su fórmula  $w = \varphi(z)$  se obtiene eliminando  $t$  de las ecuaciones  $t = \eta(z)$ ,  $t = \rho(w)$ . Llegamos finalmente a la siguiente solución del problema.

*La fórmula para la transformación de Möbius  $w = \varphi(z)$  que resuelve el problema (19.2) se encuentra despejando la ecuación*

$$\frac{w - w_0}{w - w_2} : \frac{w_1 - w_0}{w_1 - w_2} = \frac{z - z_0}{z - z_2} : \frac{z_1 - z_0}{z_1 - z_2}. \quad (19.4)$$

**Ejemplos.** Encontrar una transformación de Möbius que lleve los puntos  $-1, i, 1 + i$  en los siguientes puntos: 1)  $0, 2i, 1 - i$ ; 2)  $i, \infty, 1$ .

**Soluciones:** 1) La fórmula general (19.4) da la respuesta en la forma:

$$\frac{w-0}{w-(1-i)} : \frac{2i-0}{2i-(1-i)} = \frac{z+1}{z-1-i} : \frac{i+1}{i-1-i}. \text{ Despejando, obtenemos la fórmula para } \varphi: w = -\frac{2i(z+1)}{4z-1-5i}.$$

2) Escribimos fórmula general (19.4):  $\frac{w-1}{w-i} : \frac{\infty-1}{\infty-i} = \frac{z+1}{z-1-i} : \frac{i+1}{i-1-i}$ . En esta fórmula, entendemos que  $\frac{\infty-1}{\infty-i} = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s-1}{s-i} = 1$ . Despejando, obtenemos la transformación  $\varphi: w = \frac{(1+2i)z+6-3i}{5(z-i)}$ .

**Problema 2.** Dada una circunferencia  $\mathcal{C}$  (o una recta) y una transformación de Möbius  $w = T(z)$ , encontrar la imagen  $\mathcal{D} = T(\mathcal{C})$ .

**Solución.** Según el corolario del Lema 19.3,  $\mathcal{D}$  también va a ser una circunferencia o una recta. Se puede resolver el problema analíticamente, pero esto suele conducir a unos cálculos excesivos. Uno de los métodos menos costosos utiliza el corolario del Lema 19.4.

De momento supongamos que  $\mathcal{D}$  no es una recta (es decir,  $\infty \notin T(\mathcal{C})$ ). Introducimos la siguiente notación. Denotamos por  $A$  el centro de la circunferencia  $\mathcal{D}$ . Ponemos

$$z_A = T^{-1}(A), \quad z_\infty = T^{-1}(\infty).$$

Como  $A$  y  $\infty$  son puntos simétricos respecto de  $\mathcal{D}$ ,  $z_A$  y  $z_\infty$  son simétricos respecto de  $\mathcal{C}$ .

El algoritmo de solución es el siguiente.

- 1) Calculamos  $z_\infty = T^{-1}(\infty)$ ;
- 2) Calculamos  $z_A$  como el punto simétrico a  $z_\infty$  respecto de  $\mathcal{C}$ ;
- 3) Calculamos el centro  $A$  de la circunferencia  $\mathcal{D}$ :  $A = T(z_A)$ ;
- 4) Cogemos cualquier punto conveniente  $z$  de la circunferencia  $\mathcal{C}$  y calculamos  $T(z) \in \mathcal{D}$ . Entonces el radio de la circunferencia  $\mathcal{D}$  es igual a  $|A - T(z)|$ .

Si  $\mathcal{D}$  es una recta, se determina por un par de sus puntos, que se encuentran sin dificultad.

**Ejemplo.** Encontrar la imagen de la circunferencia  $\mathcal{C} = \{|z| = 2\}$  por la aplicación  $w = z/(z + 1 + i)$ .

**Solución:**  $z_\infty = -1 - i$ ;  $z_A = e^{5\pi i/4} 2\sqrt{2} = -2 - 2i$ . Luego el centro de  $\mathcal{D}$  es el punto  $A = \frac{-2-2i}{-2-2i+1+i} = 2$ . Cogiendo  $z = 2 \in \mathcal{C}$ , obtenemos  $T(z) = (3-i)/5$ . El radio de la circunferencia  $\mathcal{D}$  es igual a  $|A - T(z)| = |\frac{7+i}{5}| = \sqrt{2}$ .

A continuación, enunciaremos otros resultados útiles, cuya comprobación se deja al lector. Denotamos por  $\mathbb{H}$  el semiplano superior:

$$\mathbb{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}.$$

**Lema 19.5.** 1) *La transformación de Möbius*

$$T(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

donde  $a \in \mathbb{C}$ ,  $|a| < 1$  lleva el disco unidad  $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$  sobre sí mismo.

2) *Una transformación  $\varphi$  es una transformación conforme del disco unidad sobre sí mismo si y sólo si  $\varphi(z) = \alpha \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ , donde  $|\alpha| = 1$  y  $|a| < 1$ .*

En la demostración de la parte 2) se puede utilizar la unicidad de la aplicación de Riemann.

**Lema 19.6.** *Una transformación  $\varphi$  es una transformación conforme del semiplano superior  $\mathbb{H}$  en el disco unidad si y sólo si  $\varphi$  tiene la forma  $\varphi(z) = \alpha \frac{z-a}{z-\bar{a}}$ , donde  $|\alpha| = 1$  y  $a \in \mathbb{H}$ .*

Las funciones de Möbius inversas a éstas son transformaciones conformes del disco unidad al semiplano superior. Por ejemplo, la transformación  $w = \frac{z-i}{z+i}$  lleva  $\mathbb{H}$  en  $\mathbb{D}$ , y la transformación inversa  $z = i \frac{1+w}{1-w}$  lleva  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{H}$ .

## 20. Un breve recordatorio sobre las curvas de segundo orden en el plano

Aquí vamos a repasar algunas propiedades de las curvas de segundo orden en el plano, que se necesitarán para estudiar transformaciones conformes.

1) Una *parábola* en el plano se determina por un punto  $F$  (llamado *el foco*) y una recta  $l$ , llamada *la directriz* de la parábola. Se define como el conjunto de puntos del plano, cuyas distancias a  $F$  y a  $l$  son iguales. Se supone que  $A \notin l$ . *El eje* de la parábola es la recta que pasa por su foco y es ortogonal a la directriz.

En el caso particular:

$$F = ai, \quad l : \operatorname{Im} z = -a$$

( $a > 0$ ), obtenemos una parábola *en forma estándar*, que viene dada por la ecuación  $y = \frac{x^2}{4a}$ . El eje de esta parábola coincide con el eje  $y$ .

Si escogemos

$$F = 0, \quad l : \operatorname{Re} z = 2a,$$

obtenemos otra parábola

$$x = a - \frac{y^2}{4a}, \quad (20.1)$$

cuyas ramas miran “para atrás” y cuyo eje es el eje  $x$ .

2) Una *elipse* se define como

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - F_1| + |z - F_2| = 2a\}.$$

El parámetro  $a > 0$  se llama *el semieje mayor* de la elipse; se supone que  $2a > |F_1 - F_2|$ . Los puntos  $F_1$  y  $F_2$  se llaman *focos* de la elipse. Denotamos  $2c = |F_1 - F_2|$ .

La posición estándar de la elipse se obtiene al poner  $F_1 = -c$ ,  $F_2 = c$ . En este caso, la elipse tiene una ecuación de segundo orden estándar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

donde  $b > 0$ ,

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

Los puntos  $\pm a$ ,  $\pm ib$  pertenecen a esta elipse;  $[-a, a]$  es su *eje mayor* y  $[-bi, bi]$  es su *eje menor*.

La parametrización estándar de esta elipse viene dada por

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

3) Se puede definir *una hipérbola*, con focos situados en puntos  $F_1$  y  $F_2$ , como

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - F_1| - |z - F_2| = \pm 2A\}. \quad (20.2)$$

Llamamos, como antes,  $2C = |F_1 - F_2|$ , utilizando ahora letras grandes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y colocando los focos simétricamente:  $F_1 = -C$ ,  $F_2 = C$ , obtenemos *una hipérbola estándar*

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1, \quad (20.3)$$

donde ahora

$$A^2 + B^2 = C^2.$$

Los puntos  $\pm A$ , pertenecen a la hipérbola, y las rectas  $y = \pm \frac{B}{A}x$  son las asíntotas de la misma. Si las asíntotas son  $y = \pm x$  (es decir, si  $A = B$ ), se habla de una hipérbola *equilátera*.

La parametrización estándar viene dada por

$$x = \pm A \cosh t, \quad y = B \sinh t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (20.4)$$

Más precisamente, eligiendo el signo  $+$  en esta fórmula, obtenemos *la rama derecha* de la hipérbola, que corresponde al signo  $+$  en (20.2) y está en el semiplano  $x > 0$ . Eligiendo el signo  $-$  en (20.4), se obtiene la rama izquierda de la hipérbola.

## 21. La función potencia como transformación conforme

Sean  $A_j = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0, |\arg z| < \alpha_j\}$ ,  $j = 1, 2$  dos ángulos, centrados en el origen. Suponemos que  $0 < \alpha_1, \alpha_2 \leq \pi$ .

Ponemos  $a = \alpha_2/\alpha_1 > 0$ . Entonces la función  $\varphi(z) = z^a \stackrel{\text{def}}{=} e^{a \log z}$  es una transformación conforme de  $A_1$  en  $A_2$ . Entendemos aquí por  $\log z$  la rama principal del logaritmo. Combinando esta transformación, rotaciones y traslaciones, se puede escribir explícitamente la transformación conforme que lleve cualquier ángulo en el plano en cualquier otro.

## 22. Las funciones cuadrado y raíz cuadrada y dominios con fronteras parabólicas y hiperbólicas

Las funciones  $z^2$  y  $\sqrt{z}$  permiten obtener transformaciones conformes de un semiplano en el exterior de una parábola o el interior de una hipérbola

equilátera. Más precisamente, se tienen las siguientes propiedades.

1) Sea  $A > 0$ . Entonces la función  $\varphi(z) = z^2$  es una transformación conforme que lleva *el semiplano derecho*  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > A\}$  en *el exterior de la parábola*

$$x = A^2 - \frac{y^2}{4A^2}. \quad (22.1)$$

Observemos que si ponemos  $A^2 = a$ , la parábola (22.1) adquiere exactamente la forma (20.1). Por lo tanto, su foco está en el origen.

2) Sea  $A > 0$ . Entonces la rama principal de  $\sqrt{z}$  lleva el plano derecho  $\{z : \operatorname{Re} z > A\}$  en *el interior de la rama derecha de la hipérbola equilátera*  $x^2 - y^2 = A$ .

Dejamos estas dos propiedades como ejercicio.

Resumiéndolas, podemos decir que tenemos (para todo  $A > 0$ ) las siguientes transformaciones conformes:

$$\begin{aligned} 1) \quad \{z : \operatorname{Re} z > A\} &\xrightarrow{\varphi(z)=z^2} \left\{z = x + iy : x > A^2 - \frac{y^2}{4A^2}\right\}; \\ 2) \quad \{z : \operatorname{Re} z > A\} &\xrightarrow{\sqrt{z}} \{z = x + iy : x^2 - y^2 > A, x > 0\}. \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Hallar transformaciones conformes que lleven el plano superior  $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  en los siguientes dominios:

- i)  $\left\{z = x + iy : x > A^2 - \frac{y^2}{4A^2}, y > 0\right\}$ ;
- ii)  $\{z = x + iy : x^2 - y^2 > A, x > 0, y > 0\}$ .

## 23. Las transformaciones de Riemann para dominios de forma “lunar”

Sean  $p_1, p_2$  dos puntos (distintos) del plano complejo y sean  $\alpha, \beta$  dos arcos de circunferencias que unen  $p_1$  con  $p_2$ . Sea  $G$  uno de los dominios de la esfera de Riemann acotado por estos dos arcos; lo llamaremos *un dominio de forma lunar*.

Llamamos  $A, B$  a las circunferencias que contienen los arcos  $\alpha, \beta$ , respectivamente.

Admitimos que  $\alpha, \beta$  sean el mismo arco; en este caso  $G$  será la esfera de Riemann menos el arco  $\alpha$ .

También admitimos que una de las dos circunferencias sea de hecho una recta. Si, por ejemplo,  $A$  es una recta, entonces  $\alpha$  puede ser tanto el intervalo  $[p_1, p_2]$  como el exterior de este intervalo, junto con el punto  $\infty$  (en los dos casos, en la esfera de Riemann  $\alpha$  se representará por un arco de una

circunferencia que pasa por el polo norte). Como antes, hablaremos de “circunferencias” en el plano para referirnos a curvas que son circunferencias o rectas.

**Problema.** Encontrar una transformación conforme que lleve  $G$  en el disco unidad.

**Solución:** Es fácil encontrar y calcular una transformación conforme que lleve  $G$  en el plano superior. Para ello, consideremos primero la transformación de Möbius

$$w = \eta_1(z) = \frac{z - p_1}{z - p_2}.$$

Esta transformación lleva  $p_1$  en 0 y  $p_2$  en  $\infty$ . Por lo tanto,  $\eta_1(z)$  lleva las “circunferencias”  $A$  y  $B$  en “circunferencias” que necesariamente contienen  $\infty$  y por lo tanto, son rectas. Por lo tanto, las imágenes  $\eta_1(\alpha)$  y  $\eta_1(\beta)$  por la transformación  $\eta_1(z)$  son unos rayos que salen del origen.

Los arcos  $\alpha$  y  $\beta$  dividen el plano complejo en dos dominios, y  $G$  es uno de ellos. Denotamos por  $\varphi$  el ángulo de apertura del dominio  $G$  en el punto  $p_1$ . La imagen  $\eta_1(G)$  es uno de los dos ángulos acotados por los rayos  $\eta_1(\alpha)$  y  $\eta_1(\beta)$ . Como  $\eta_1(z)$  conserva los ángulos en el punto  $p_1$ , el ángulo entre los rayos  $\eta_1(\alpha)$  y  $\eta_1(\beta)$  en el origen es igual a  $\varphi$ . Haciendo una rotación  $w \mapsto t = \eta_2(w) \stackrel{\text{def}}{=} e^{i\theta} w$ , podemos poner nuestro ángulo en una posición simétrica:

$$\eta_2 \circ \eta_1(G) = \left\{ t \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg t| < \frac{\varphi}{2} \right\},$$

donde  $\arg t \in (-\pi, \pi]$  significa el valor principal del argumento. Aplicamos la función potencia  $s = \eta_3(t) \stackrel{\text{def}}{=} t^{\frac{\pi}{\varphi}}$  y obtenemos que la imagen de  $G$  en el plano  $s$  es el semiplano derecho:

$$\eta_3 \circ \eta_2 \circ \eta_1(G) = \{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 0\}.$$

Para llevar el semiplano derecho en el disco unidad, podemos utilizar la transformación de Möbius  $\zeta = \frac{s-1}{s+1}$ .

De esta forma, el problema se resuelve mediante una cadena de las siguientes transformaciones conformes:

$$z \in G \xrightarrow{\eta_1} w \xrightarrow{\eta_2} t \xrightarrow{\eta_3} s \xrightarrow{\zeta = \frac{s-1}{s+1}} \zeta \in \mathbb{D}.$$

## 24. La función de Joukowski

La función de Joukowski se define como

$$w = w(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

Se usa mucho en la práctica de transformaciones conformes. Como cualquier función racional, se extiende a una transformación holomorfa de  $\widehat{\mathbb{C}}$  en  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

Son inmediatas las siguientes propiedades de  $w(z)$ .

**1)** Su derivada  $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{z^2})$  se anula en los puntos  $1$  y  $-1$  y sólo en estos puntos. Por consiguiente, la función de Joukowski no puede ser conforme en ninguna región que contenga  $-1$  o  $1$ .

**2)** Si  $z_1 = 1/z_2$ , entonces  $w(z_1) = w(z_2)$ . Si los puntos  $z_1$  y  $z_2$  son simétricos respecto de la circunferencia unidad (es decir,  $z_1 = \overline{1/z_2}$ ), entonces sus imágenes son simétricas respecto del eje real:  $w(z_1) = \overline{w(z_2)}$ .

**3)**  $w(\infty) = w(0) = \infty$ .

Calculando la imagen de un punto genérico  $z = re^{i\theta}$ , obtenemos:

$$z = re^{i\theta} \longrightarrow w = \frac{r + 1/r}{2} \cos \theta + i \frac{r - 1/r}{2} \operatorname{sen} \theta. \quad (24.1)$$

De aquí se deducen las siguientes propiedades.

**4)** La función de Joukowski lleva la circunferencia unidad en el intervalo  $[-1, 1]$ :  $z = \cos \theta \pm i \operatorname{sen} \theta \mapsto w = \cos \theta$ . En particular,  $w(-1) = -1$  y  $w(1) = 1$ .

**5)** La antiimagen de cualquier número  $w \notin [-1, 1]$  consiste de exactamente dos puntos, uno de los cuales está estrictamente dentro del disco unidad  $\mathbb{D}$  y el otro estrictamente fuera. Por lo tanto, la transformación de Joukowski es conforme en  $\mathbb{D}$  y en el exterior  $\{z : |z| > 1\}$  del disco unidad.

**6)** La función de Joukowski lleva el exterior  $\{z : |z| > 1\}$  del disco unidad (junto con el infinito) en el exterior del intervalo  $[-1, 1]$  junto con el infinito. En la región  $\{z : |z| > 1\} \cup \{\infty\}$  la función  $w(z)$  es univalente; por lo tanto, es una transformación conforme

$$\{z : |z| > 1\} \cup \{\infty\} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus [-1, 1].$$

Para entender mejor la forma de esta transformación, es útil mirar las imágenes de las líneas de nivel  $\{|z| = \text{const}\}$ ,  $\{\arg z = \text{const}\}$ .

**7)** Sea  $R > 1$ . Entonces la función de Joukowski lleva la circunferencia  $\{|z| = R\}$  en una elipse:

$$w(z) : (\{|z| = R\}) \mapsto \left\{ \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1 \right\}, \quad a = \frac{R + 1/R}{2}, \quad b = \frac{R - 1/R}{2} \quad (24.2)$$

(aquí  $w = u + iv$ ). Los focos de esta elipse son siempre  $-1$  y  $1$ , independientemente de  $R$ .



Según la propiedad 2), la imagen de la circunferencia  $\{|z| = 1/R\}$  es la misma elipse.

Para encontrar las imágenes de los rayos  $\{z = re^{i\theta} : r > 0\}$ , es útil hacer el cambio  $r = e^t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Comparando la fórmula (24.1) con (20.3), obtenemos lo siguiente:

8) La función de Joukowski lleva cualquier rayo

$$R_\theta = \{z : z \neq 0, \arg z = \theta\}$$

en una rama de la hipérbola. Más concretamente, si  $\theta$  es un número fijo,  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ ,  $\theta \neq 0$ , entonces  $w(R_\theta)$  es la parte derecha de la hipérbola

$$\left\{u + iv : \frac{u^2}{\cos^2 \theta} - \frac{v^2}{\operatorname{sen}^2 \theta} = 1\right\};$$

si  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ ,  $\theta \neq \pi$ , entonces  $w(R_\theta)$  es la parte izquierda de la hipérbola definida por la misma fórmula. Nótese que los focos de estas hipérbolas no dependen de  $\theta$  y son siempre  $-1$  y  $1$ .

Al final, las imágenes de los rayos  $R_{\pi/2}$  y  $R_{-\pi/2}$  son iguales y coinciden con el eje imaginario. La imagen de  $R_0 = x : x > 0$  es el rayo  $[1, +\infty)$  (pasado dos veces). La imagen de  $R_\pi = x : x < 0$  es el intervalo  $[-\infty, -1]$  (también pasado dos veces).

Tomando la unión de las imágenes de  $R_\theta$ ,  $0 < \theta < \pi$ , vemos que

9) La imagen del semiplano superior  $\Pi_+ = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  es

$$\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}.$$

La imagen del semiplano inferior  $\Pi_- = \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$  es el mismo conjunto. La función de Joukowski es conforme tanto en  $\Pi_+$  como en  $\Pi_-$ .

**Ejercicio.** Encontrar una transformación conforme que lleva el dominio

$$F = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$$

en el semiplano superior.

*Solución.* La función de Joukowski  $w(z) = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  hace la tarea. Para verlo, basta observar que la mitad superior de la circunferencia de radio  $R$  se lleva en la mitad superior de la elipse con semiejes  $\frac{R+1/R}{2}$  y  $\frac{R-1/R}{2}$  y que la unión de estas elipses es todo el semiplano superior. Véanse las propiedades 6)–8). Dejamos los detalles al lector.  $\square$

## 25. Las ramas de la inversa a la función de Joukowski

Es fácil ver que se puede reescribir la transformación de Joukowski como

$$\frac{w-1}{w+1} = \left( \frac{z-1}{z+1} \right)^2.$$

Si introducimos la notación  $\varphi(w) = \frac{w-1}{w+1}$ , entonces podemos representar la función de Joukowski como la siguiente composición de transformaciones

$$z \xrightarrow{\varphi} t \xrightarrow{s=t^2} s \xrightarrow{\varphi^{-1}} w \quad (25.1)$$

donde  $\varphi^{-1}(s) = \frac{1-s}{1+s}$  es la función inversa a la función  $\varphi$ . Como la función de Joukowski no es inyectiva, no tiene inversa. Para definir las ramas de la inversa, hemos de tomar la inversa de la restricción de la función de Joukowski a un dominio más pequeño (de forma parecida a cómo hemos definido las ramas de la raíz y del logaritmo). Esta operación no es única.

La transformación de Möbius  $\varphi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  es invertible. Las fórmulas (25.1) indican que para elegir una rama de la función de Joukowski hemos de elegir una rama de la función inversa de la transformación  $t \mapsto s = t^2$ . Para ello, introducimos las regiones

$$\Pi_\alpha = \{t \in \mathbb{C} : t \neq 0, \quad \arg t \in (\alpha, \alpha + \pi)\}, \quad (25.2)$$

$$\mathbb{C}_{2\alpha} = \{s \in \mathbb{C} : s \neq 0, \quad \arg s \neq 2\alpha \pmod{2\pi}\}. \quad (25.3)$$

La transformación  $t \mapsto s = t^2$  lleva el semiplano  $\Pi_\alpha$  en el “plano complejo  $t$ ”, en la región  $\mathbb{C}_{2\alpha}$  en el plano  $s$ , y es uno a uno en  $\Pi_\alpha$ . Llamamos  $(\sqrt{\cdot})_\alpha$  la inversa a esta transformación:

$$(\sqrt{\cdot})_\alpha : \mathbb{C}_{2\alpha} \rightarrow \Pi_\alpha.$$

Consideremos las antiimágenes

$$\mathcal{D}_\alpha = \varphi^{-1}(\Pi_\alpha), \quad \mathcal{E}_{2\alpha} = \varphi^{-1}(\mathbb{C}_{2\alpha}).$$

Según las fórmulas (25.1), la función definida como la composición de las siguientes transformaciones

$$\mathcal{E}_{2\alpha} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}_{2\alpha} \xrightarrow{(\sqrt{\cdot})_\alpha} \Pi_\alpha \xrightarrow{\varphi^{-1}} \mathcal{D}_\alpha \quad (25.4)$$

es una rama de la función inversa a la función de Joukowski.

**Definición.** Definimos la transformación conforme

$$\xi_\alpha : \mathcal{E}_{2\alpha} \rightarrow \mathcal{D}_\alpha$$

como la composición de las transformaciones conformes en la fórmula (25.4).

La imagen del rayo  $R_\alpha = \{re^{i\alpha} : 0 \leq r \leq \infty\}$ , que conecta los puntos 0 y  $\infty$  (incluyendo estos puntos) por medio de la transformación de Möbius  $\varphi^{-1}(s) = \frac{1-s}{1+s}$  es un arco  $\gamma_\alpha$  cerrado de la circunferencia cuyos extremos son  $\varphi^{-1}(0) = 1$  y  $\varphi^{-1}(\infty) = -1$ . Como  $(\varphi^{-1})'(0) = 2 > 0$ , el arco  $\gamma_\alpha$  forma el ángulo  $\alpha$  con el rayo  $[1, +\infty)$  en el punto 1. Estas observaciones de hecho determinan  $\gamma_\alpha$  de una forma única. Se ve que

$$\mathcal{E}_{2\alpha} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma_{2\alpha}.$$

El dominio  $\mathcal{D}_\alpha$  es la unión de todos los arcos  $\gamma_\beta$  (sin sus extremos), donde  $\beta$  recorre el intervalo  $(\alpha, \alpha + \pi)$ . Por lo tanto, para todo  $\alpha$ ,  $\mathcal{D}_\alpha$  es un disco acotado por una circunferencia que pasa por puntos  $-1$  y  $1$  (o un semiplano, en el caso límite).

**Ejemplos.** Se ve que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_0 &= \{z : \operatorname{Im} z > 0\}; & \mathcal{D}_{\frac{\pi}{2}} &= \{z : |z| < 1\}; \\ \mathcal{D}_\pi &= \{z : \operatorname{Im} z < 0\}; & \mathcal{D}_{\frac{3\pi}{2}} &= \{z : |z| > 1\}. \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Encontrar una transformación  $q$  que lleva el exterior  $\mathcal{E}$  de una elipse  $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$  en el disco unidad. Entendemos que  $\mathcal{E} \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ,  $\infty \in \mathcal{E}$ .

*Solución.* El caso  $a = b$  es sencillo (ver más adelante). Supongamos que  $a > b$ , y definamos  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

La transformación  $w \mapsto \frac{w}{c}$  lleva  $\mathcal{E}$  en el exterior de la elipse estándar  $\mathcal{E}' : \frac{u^2}{(a/c)^2} + \frac{v^2}{(b/c)^2} = 1$ , cuyos focos están en los puntos  $\pm 1$ .

La rama  $\xi_{3\pi/2}$  de la inversa de la función de Joukowski lleva el exterior del intervalo  $[-1, 1]$  en el exterior del disco unidad y lleva el exterior de  $\mathcal{E}'$  en el exterior del disco cuyo radio  $R > 1$  se determina por las ecuaciones

$$\frac{R + 1/R}{2} = \frac{a}{c}, \quad \frac{R - 1/R}{2} = \frac{b}{c}, \quad (25.5)$$

ver (24.2). Sumando estas ecuaciones, obtenemos que

$$R = \frac{a + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{a + b}}{\sqrt{a - b}}.$$

Recíprocamente, este radio  $R$  satisface las ecuaciones (25.5) y es mayor que 1. Por tanto, definiendo  $R$  de esta manera, vemos que la solución viene dada por la transformación

$$q(w) = \frac{R}{\xi_{3\pi/2}(w/c)}.$$

□

**Ejercicio.** Encontrar una transformación que lleva la región  $H$ , comprendida entre las dos ramas de la hipérbola  $\frac{u^2}{1} - \frac{v^2}{3} = 1$ , en el disco unidad, de tal forma que  $0 \mapsto 0$ ,  $1 \mapsto i$ .

*Solución.* Los focos de la hipérbola están en los puntos  $\pm C$ , donde  $C^2 = A^2 + B^2 = 1 + 3 = 4$ , es decir, en los puntos  $\pm 2$ . Por lo tanto, primero aplicamos la transformación  $w \mapsto w/2$ . Obtenemos un dominio análogo  $H'$  que está entre las ramas de la hipérbola  $\frac{u^2}{1/4} - \frac{v^2}{3/4} = 1$ , cuyos focos ya están en  $\pm 1$ . Podemos aplicar la transformación  $\xi_0$ , que lleva conformemente  $H'$  en el ángulo

$$\pi/3 < \arg z < 2\pi/3,$$

cuya apertura es igual a  $\pi/3$ . La transformación  $z_1 = z^3$  convierte este ángulo en  $\pi < \arg z_1 < 2\pi$ , es decir, en el semiplano inferior. La función  $t = \frac{z_1+i}{z_1-i}$  transforma el semiplano inferior en el disco unidad. Componiendo todas estas transformaciones, obtenemos la siguiente respuesta:

$$t(w) = \frac{(\xi_0(w/2))^3 + i}{(\xi_0(w/2))^3 - i}. \quad \square$$

## 26. Dominios con cortes

Sabiendo una fórmula para la transformación conforme del disco unidad  $\mathbb{D}$  sobre un dominio, a veces se puede obtener también la fórmula para las transformaciones conformes de  $\mathbb{D}$  sobre este dominio con cortes.

Ilustraremos este método con dos ejemplos.

**Ejemplo.** Encontrar una transformación conforme del semiplano derecho con el corte por el intervalo  $[0, 1]$

$$T = \{t : \operatorname{Re} t > 0\} \setminus [0, 1]$$

sobre el semiplano derecho  $\Pi = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ .

**Solución.** El problema se resuelve considerando las transformaciones conformes

$$Q = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 1] \longrightarrow Q_1 = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \longrightarrow \Pi.$$

que actúan de la siguiente forma:

$$t \in T \xrightarrow{q=t^2} q \in Q \xrightarrow{q_1=q-1} q_1 \in Q_1 \xrightarrow{z=\sqrt{q_1}} z \in \Pi \quad (26.1)$$

Tomamos aquí la rama principal de la raíz cuadrada.

**Respuesta:** Una de las transformaciones conformes de  $T$  sobre  $\Pi$  viene dada por  $z = z(t) = \sqrt{t^2 - 1}$ .

La transformación conforme de  $\Pi$  sobre  $T$  se consigue tomando la composición de las transformaciones que son inversas de las transformaciones en la cadena (26.1), lo que da la transformación  $t = t(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ .

**Ejemplo.** Sea  $P$  el exterior de la parábola  $x = 4 - \frac{1}{16y^2}$  y sea  $P_1 = P \setminus [4, 25]$ . Encontrar una transformación conforme que lleva el dominio  $P_1$  en el semiplano derecho  $\text{Im } z > 0$ .

**Solución.** La transformación definida por la rama principal de la raíz cuadrada convierte  $P_1$  en un dominio parecido al dominio  $T$  del ejemplo anterior:

$$p \in P_1 \xrightarrow{t_1=\sqrt{p}} T_1 = \{t_1 \in \mathbb{C} : \text{Re } t_1 > 2\} \setminus [2, 5].$$

El dominio  $T$  se obtiene aplicando la transformación lineal

$$t_1 \in T_1 \xrightarrow{t=(t_1-2)/3} T = \{t \in \mathbb{C} : \text{Re } t > 0\} \setminus [0, 1].$$

Como acabamos de ver, la transformación  $z(t) = \sqrt{t^2 - 1}$  lleva  $T$  en el semiplano derecho  $\Pi$ .

**Respuesta:** Una de las transformaciones conformes de  $P_1$  sobre  $\Pi$  viene dada por

$$z = z(p) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{p} - 2}{3}\right)^2 - 1}.$$

Las transformaciones conformes son importantes en muchas aplicaciones, tales como electrostática o mecánica de fluidos. Ver [4] o [17, vol. 2]. Hemos tocado sólo una pequeña parte de herramientas de este tema. Entre los temas que no hemos podido desarrollar mencionaremos la fórmula de Christoffel - Schwartz, que da una transformación conforme de un dominio poligonal cualquiera en el semiplano superior, ver por ejemplo [13], [11] o [17, vol. 2].

# Capítulo III. Integración. Series de potencias.

## 27. Repaso de las integrales de línea en $\mathbb{R}^n$

Para relacionar las integrales de línea de la variable compleja con las que se han estudiado en el curso de varias variables reales, empezaremos nuestra exposición con curvas en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición. 1)** Sea  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$  una curva continua, y

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)),$$

donde  $\gamma_j(t)$  es la  $j$ -ésima coordenada de  $\gamma(t)$ . Diremos que la curva  $\gamma$  es *diferenciable* si existe

$$\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$$

para todo  $t \in [a, b]$ ,  $\gamma' : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$  es continua y  $\gamma'(t) \neq 0$  para todo  $t \in [a, b]$  (Hablamos de las derivadas laterales en los extremos del intervalo  $[a, b]$ ).

**2)** Decimos que la curva  $\gamma$  es *diferenciable a trozos* si es continua y existe una partición  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$  del intervalo  $[a, b]$  tal que la restricción de  $\gamma$  a cada uno de los intervalos  $[t_{j-1}, t_j]$  es diferenciable.

De hecho, hablamos de curvas diferenciables, en lugar de continuamente diferenciables, para abreviar el lenguaje.

**Definición.** Sea  $\gamma : [a, b] \mapsto \mathbb{R}^n$  una curva diferenciable a trozos. Supongamos que el soporte  $\gamma([a, b])$  de la curva está contenido en un subconjunto  $G$  de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\vec{P} = (P_1, \dots, P_n)$  es un campo vectorial en  $G$ . Definimos la forma diferencial

$$\omega = P_1 dx_1 + \dots + P_n dx_n$$

en  $G$ . (Estaremos suponiendo siempre que  $\omega$  es continua, es decir, que son continuos sus coeficientes  $P_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ ). La *integral de línea* se define como

$$\int_{\gamma} \omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \left( P_1(\gamma(t))\gamma'_1(t) + \dots + P_n(\gamma(t))\gamma'_n(t) \right) dt. \quad (27.1)$$

Se puede entender la última integral en el sentido de Riemann, ya que es una integral de una función de una variable, continua a trozos.

Esta definición es conocida del curso del Cálculo de Varias Variables. Es la llamada *integral de línea de primer tipo*. Las notaciones para esta integral son:

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma} P_1 dx_1 + \cdots + P_n dx_n = \int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{x}$$

- Propiedades.** 1)  $\int_{\gamma} \lambda \omega = \lambda \int_{\gamma} \omega$ ;  
 2)  $\int_{\gamma} (\omega_1 + \omega_2) = \int_{\gamma} \omega_1 + \int_{\gamma} \omega_2$ ;  
 3)  $\gamma = \text{const} \implies \int_{\gamma} \omega = 0$ .

**Ejemplo.** Sea  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [0, 1]$ , y sea  $\vec{P}(x, y) = (xy, y^2)$ , es decir,  $\omega = xy dx + y^2 dy$ . Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{x} &= \int_{\gamma} xy dx + y^2 dy = \int_0^1 t^3 dt + t^4 dt^2 = \\ &= \int_0^1 (t^3 + 2t^5) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{2}{6} t^6 \Big|_{t=0}^{t=1} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$

Se ve que el resultado se obtiene a partir del siguiente manejo de las diferenciales: 1)  $x(t) = t$ ,  $y(t) = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$  (para la curva  $\gamma$ );  $dx = 1$ ,  $dy = 2t dt$ ; 2) Sustituimos estas expresiones formalmente en la integral  $\int_{\gamma} xy dx + y^2 dy$  y escribimos  $\int_a^b$  (en nuestro caso,  $\int_0^1$ ) en lugar de la integral sobre  $\gamma$ .

**Definición.** 1) Sea  $G$  un dominio en  $\mathbb{R}^n$  y  $\omega = P_1 dx_1 + \cdots + P_n dx_n$  una forma diferencial (continua) en  $G$ . Sea  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  una función escalar en  $G$ . Se dice que  $F$  es una *primitiva* de  $\omega$  si  $dF = \omega$ , es decir,

$$P_k = \frac{\partial F}{\partial x_k}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

2) Decimos que  $\omega$  es *exacta* si tiene una primitiva.

**Propiedad 4).** Supongamos que  $\omega$  es una forma exacta en un dominio  $G \subset \mathbb{R}^n$ , y  $F : G \rightarrow \mathbb{R}$  es su función primitiva. Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  una curva en  $G$ , diferenciable a trozos, y sean  $A = \gamma(a)$  el inicio y  $B = \gamma(b)$  el final de la curva  $\gamma$ . Entonces se tiene la fórmula

$$\int_{\gamma} \omega = F(B) - F(A). \quad (27.2)$$

*Demostración.*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \sum_{k=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_k}(\gamma(t)) \gamma_k(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)). \quad \square$$

*Observaciones.* 1) Esta propiedad es una generalización a  $\mathbb{R}^n$  de la regla de Barrow.

2) En particular, si  $\omega$  tiene una primitiva en  $G$ , entonces  $\int_{\gamma} \omega$  sólo depende del inicio y del final de la curva  $\gamma$  y no de su recorrido (mientras la curva esté contenida en  $G$ ). Se dice en este caso que la integral de  $\omega$  *no depende del camino* en  $G$ .

**Definición.** Supongamos que tenemos una transformación  $[a, b] \xrightarrow{\varphi} [p, q]$ , donde  $\varphi([a, b]) = [p, q]$ ,  $\varphi$  es diferenciable a trozos y  $\varphi' > 0$ , salvo en un número finito de puntos. Sea  $\gamma_0$  una curva en  $\mathbb{R}^n$ , parametrizada con el intervalo  $[p, q]$ . Entonces se dice que la curva

$$\gamma(t) = \gamma_0(\varphi(t)), \quad t \in [a, b]$$

es una *reparametrización* de  $\gamma_0$  que conserva la orientación.

Si, en cambio,  $\varphi' < 0$ , salvo en un número finito de puntos, de tal forma que  $\varphi(a) = q$  y  $\varphi(b) = p$ , entonces se dice que  $\gamma$  es la *reparametrización de  $\gamma_0$  con la orientación invertida*.

**Propiedad 5)** Si la curva  $\gamma$  se obtiene de  $\gamma_0$  mediante un cambio de parámetro sin cambiar la orientación, entonces

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_0} \omega.$$

Si  $\gamma$  es una reparametrización de  $\gamma_0$  con la orientación invertida, entonces

$$\int_{\gamma} \omega = - \int_{\gamma_0} \omega.$$

Esta afirmación se comprueba a partir de la definición de la integral de la línea y el teorema de cambio de variables para funciones de una variable.

Una forma de cambiar la orientación de cualquier curva  $\gamma_0$  es definir la curva  $\gamma_0^-$ , poniendo  $\gamma_0^-(t) = \gamma_0(-t)$ ,  $t \in [-b, -a]$ . En vez de  $\gamma_0^-$ , utilizaremos la notación  $-\gamma_0$ .

En nuestra exposición, necesitaremos la notación

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

donde  $\gamma_j$  son unas curvas cualesquiera diferenciables a trozos. Por definición,

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n} \vec{F} \cdot d\vec{x} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (27.3)$$



Supongamos que tenemos dos curvas  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferenciables a trozos tales que el inicio de  $\gamma_2$  coincide con el final de  $\gamma_1$ :  $\gamma_2(b) = \gamma_1(c)$ . En este caso particular, identificaremos la suma  $\gamma_1 + \gamma_2$  con una sola curva  $\gamma$ , diferenciable a trozos, que se define de la siguiente forma:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t + (c - b)), & t \in [b, b + d - c]. \end{cases}$$

Como  $\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz$ , esta definición no contradice a la notación, dada en (27.3).

Utilizando el cambio de orientación de curvas, se definen también  $\gamma_1 - \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 + (-\gamma_2)$ ,  $-\gamma_1 + \gamma_2 \stackrel{\text{def}}{=} (-\gamma_1) + \gamma_2$ , etc.

**Propiedad 6)**  $\int_{\gamma_1 + \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$ .

**El significado físico de la integral de línea.** Sea  $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$  un campo de fuerzas en una región de  $\mathbb{R}^3$  y  $\gamma$  una curva en esta región. Entonces  $\int_{\gamma} F_1 dx_1 + F_2 dx_2 + F_3 dx_3$  es el trabajo de la fuerza  $\vec{F}$  a lo largo del camino  $\gamma$ . Se tiene la misma interpretación para campos de fuerzas en el plano.

Podemos aplicar la definición (27.1) de la integral  $\int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{x}$  para un campo  $\vec{P} : G \rightarrow \mathbb{C}^n$  con valores complejos. Cualquier campo de este tipo se descompone como  $\vec{P} = \vec{P}_r + i\vec{P}_i$ , donde  $\vec{P}_r, \vec{P}_i : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  son campos reales. Suponiendo que el campo  $\vec{P}$  es continuo, obtenemos la fórmula

$$\vec{P} = \vec{P}_r + i\vec{P}_i \implies \int_{\gamma} \vec{P} \cdot d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{P}_r \cdot d\vec{x} + i \int_{\gamma} \vec{P}_i \cdot d\vec{x}.$$

Las propiedades 1–6 siguen siendo válidas para formas con valores complejos.

## 28. Las integrales complejas de línea

La siguiente definición es una de las más importantes en este curso.

**Definición.** Supongamos que  $G$  es un conjunto en el plano complejo y  $f$  es una función continua en  $G$  con valores complejos. Sea  $\gamma$  una curva diferenciable a trozos, contenida en  $G$ . Ponemos

$$\int_{\gamma} f(z) dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} f dx + if dy.$$

Aquí entendemos que  $z = x + iy$ , es decir, que las coordenadas estándar en  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  se llaman  $x, y$  (en vez de  $x_1, x_2$  en la notación anterior).

Vemos que esta definición es compatible con la notación

$$dz \stackrel{\text{def}}{=} dx + i dy.$$

Sea  $\gamma(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , una parametrización de  $\gamma$ . Según la definición de la integral de línea,

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**Ejemplos.** 1) Para cualquier curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$\int_{\gamma} dz = \int_{\gamma} dx + i dy = \int_{\gamma} d(x + iy) = \gamma(b) - \gamma(a).$$

Estamos aplicando aquí la Propiedad 4:  $F(x, y) = x + iy$  es una primitiva de la forma diferencial  $dz = dx + i dy$ .

2) De la forma similar,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} z dz &= \int_{\gamma} (x + iy)(dx + i dy) = \\ &= \int_{\gamma} (x + iy)dx + (ix - y) dy = \frac{1}{2}[\gamma(b)^2 - \gamma(a)^2]. \end{aligned} \quad (28.1)$$

Aquí utilizamos la primitiva  $F(z) = F(x, y) = \frac{z^2}{2} = \frac{1}{2}[(x^2 - y^2) + 2ixy]$ :  $F'_x = x + iy$ ,  $F'_y = ix - y$ .

En estos dos ejemplos, la propiedad de independencia de la integral del camino se cumple para todo el plano complejo  $\mathbb{C}$ .

3) Sean  $\gamma_1, \gamma_2$  los arcos que conectan 1 con  $-1$  en  $\mathbb{C}$ , dados por  $\gamma_1(t) = -t$ ,  $t \in [-1, 1]$ , y  $\gamma_2(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, \pi]$ . Calculemos la integral de la forma compleja  $\bar{z} dz$  sobre estos dos arcos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \bar{z} dz &= \int_{-1}^1 (-t) d(-t) = \frac{t^2}{2} \Big|_{-1}^1 = 0; \\ \int_{\gamma_2} \bar{z} dz &= \int_0^{\pi} e^{-it} d(e^{it}) = \int_0^{\pi} e^{-it} i e^{it} dt = i\pi. \end{aligned}$$

Se ve que en este caso la integral de la forma  $\bar{z} dz$  en  $\mathbb{C}$  *sí depende del camino*.

Necesitaremos también *la integral de línea de segundo tipo*

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt, \quad (28.2)$$

donde  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Recordamos que si  $f(z) \equiv 1$ , entonces

$$L(\gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt \quad (28.3)$$

es la longitud de la curva  $\gamma$ .

**Ejemplo.** La longitud del arco  $\gamma(t) = (\sin t)e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  es

$$L(\gamma) = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{\pi} |(\cos t + i \sin t)e^{it}| dt = \pi.$$

**Lema 28.1.** Sea  $\gamma$  una curva simple (o curva de Jordan) y sea  $L(\gamma)$  su longitud. Entonces

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq \max_{\gamma} |f(z)| \cdot L(\gamma).$$

*Demostración.* Estas desigualdades se siguen de las definiciones anteriores y de las estimaciones

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))| |\gamma'(t)| dt \leq \max_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \end{aligned}$$

□

Al final del curso, necesitaremos la siguiente propiedad:

**Lema 28.2** (cambio de variable en la integral de línea). Sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva en el plano complejo y  $f$  una función diferenciable, definida en un entorno de esta curva. Entonces para toda función continua  $g$ , definida en la curva  $f(\gamma)$ , se tiene que

$$\int_{f \circ \gamma} g(w) dw = \int_{\gamma} g(f(z)) f'(z) dz \quad (28.4)$$

Formalmente, el cambio de variable se reduce a sustituciones  $w = f(z)$ ,  $dw = f'(z) dz$ .

La demostración sigue directamente de la definición y de la fórmula (7.5).

□

**Lema 28.3.** Sea  $\gamma$  una curva diferenciable a trozos en  $\mathbb{C}$ .

**a)** Sean  $f_n : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  funciones continuas en el soporte de  $\gamma$ . Si  $f_n(z) \rightarrow g(z)$  cuando  $n \rightarrow \infty$  uniformemente para  $z$  en el soporte de  $\gamma$ , entonces

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} g(z) dz$$

cuando  $n \rightarrow \infty$ .

**b)** Sean  $a_n : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$  funciones continuas en el soporte de  $\gamma$ . Si  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z) = g(z)$  para  $z$  en el soporte de  $\gamma$  y la convergencia de la serie es uniforme, entonces

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\gamma} a_k(z) dz = \int_{\gamma} g(z) dz.$$

Se afirma, en particular, que la suma converge.

*Demostración.* Para demostrar la parte a), basta observar que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} f_n(z) dz - \int_{\gamma} g(z) dz \right| \\ & \leq \int_{\gamma} |f_n(z) - g(z)| |dz| \leq L(\gamma) \max_{\gamma} |f_n - g| \rightarrow 0 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La parte b) sigue de la parte a). □

## 29. La fórmula de Green y el teorema de Cauchy

A partir de este momento, todas las curvas o caminos en  $\mathbb{R}^n$  o en  $\mathbb{C}$  que consideremos, serán diferenciables a trozos.

**Definición.** Supongamos que  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  son curvas de Jordan diferenciables a trozos que no se intersecan mutuamente. Supongamos que  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  están en el interior de  $\gamma_0$  y para toda curva  $\gamma_k, k \geq 1$ , las demás curvas están en su exterior. A estas curvas les asociamos el conjunto  $\Omega$  de puntos que están en el interior de  $\gamma_0$  y en el exterior de curvas  $\gamma_k, k \geq 1$ , y el conjunto compacto

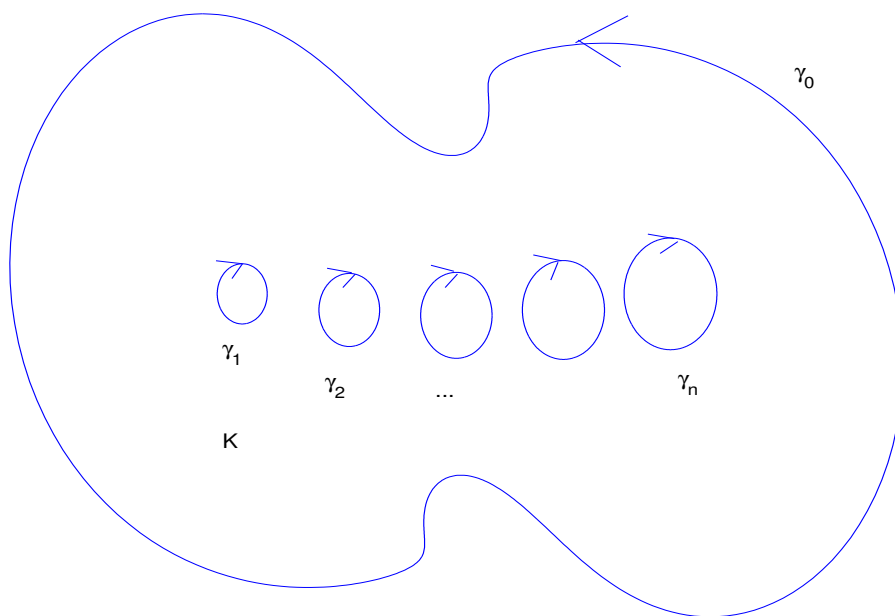
$$K = \text{clos } \Omega = \Omega \cup \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_n.$$

Un conjunto  $K$  que tiene esta forma se llama *un compacto de Jordan*.

Es fácil ver que la frontera de  $K$  es la unión de todas las curvas  $\gamma_j$ .

Orientamos positivamente la curva exterior  $\gamma_0$  y negativamente las demás curvas  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ . Por la *frontera de  $K$ , orientada positivamente*, entendemos la combinación

$$\partial K = \gamma_0 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n.$$



### Compacto de Jordan

El curso de Cálculo de varias variables reales incluye el siguiente resultado<sup>4</sup>

**Teorema 29.1** (Fórmula de Green). Sean  $P, Q$  funciones de clase  $C^1$  en un entorno de un compacto de Jordan  $K$ . Entonces

$$\int_{\partial K} P dx + Q dy = \iint_K \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

donde la frontera  $\partial K$  está orientada positivamente.

*Observación.* En el Cálculo de varias variables, se suele suponer que  $P$  y  $Q$  son funciones reales. Es obvio que la fórmula sigue siendo válida para funciones complejas.

<sup>4</sup>usualmente, sin demostración completa. La demostración completa se ve a veces en el curso de Geometría, cuando se estudia el Teorema abstracto de Stokes. Ver el comentario en el Apéndice 1.

La demostración de la fórmula de Green se contiene, por ejemplo, en [3].

## Las derivadas complejas $\frac{\partial}{\partial z}$ , $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$

**Definición.** Sea  $f$  una función compleja en un dominio  $G$ , diferenciable en el sentido real. Definimos las siguientes operaciones diferenciales:

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z); \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z).$$

### Propiedades

- 1)  $\frac{\partial}{\partial z}(f + \lambda g) = \frac{\partial}{\partial z} f + \lambda \frac{\partial}{\partial z} g$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(f + \lambda g) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f + \lambda \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g$  ( $\lambda = \text{const}$ );
- 2)  $\frac{\partial}{\partial z}(fg) = f \frac{\partial}{\partial z} g + g \frac{\partial}{\partial z} f$ ,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(fg) = f \frac{\partial}{\partial \bar{z}} g + g \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f$ ;
- 3)  $f$  es holomorfa en  $G \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$  en  $G$  (es decir, la ecuación  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f = 0$  es equivalente a las ecuaciones de Cauchy–Riemann);
- 4) Si  $f$  es holomorfa en  $G$ , entonces  $\frac{\partial}{\partial z} f$  coincide con la derivada compleja  $f'$  de  $f$ ;
- 5) Si  $f(z)$  es un polinomio en  $z$  y  $\bar{z}$ :

$$f(z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N c_{mn} z^m \bar{z}^n, \quad (29.1)$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial z} f(z) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=0}^N m c_{mn} z^{m-1} \bar{z}^n, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=1}^N n c_{mn} z^m \bar{z}^{n-1}.$$

En particular, por ejemplo,  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \bar{z} \equiv 1$ .

La siguiente reformulación del Teorema de Green en términos de la derivada  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  será nuestro punto de partida en el estudio de la relación entre las integrales complejas de línea y la diferenciación compleja.

**Teorema 29.2** (Fórmula de Cauchy–Green). *Sea  $G$  un dominio y  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  una función de clase  $C^1$ . Sea  $K$  un compacto de Jordan,  $K \subset G$ , cuya frontera  $\partial K$  está orientada positivamente. Entonces*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy. \quad (29.2)$$

*Demostración.* El resultado se obtiene de la fórmula de Green:

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} f(z) dz &= \int_{\partial K} f(z) dx + if(z) dy = \iint_{\partial K} \left( i \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \\ &= 2i \iint_K \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) f(z) dx dy = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx dy. \quad \square \end{aligned}$$

**Ejercicio.** Utilizar la fórmula (29.2) para calcular la integral  $\int_{|z|=R} \bar{z} dz$ . Comparar con el cálculo directo a través de la definición de la integral de línea.

**Respuesta:**

$$\int_{|z|=R} \bar{z} dz = 2\pi i R^2 \quad (29.3)$$

Obsérvese que la notación  $\int_{|z|=R} f(z) dz$  supone que orientación de la circunferencia  $|z| = R$  es positiva.

**Teorema 29.3** (Teorema de Cauchy). *Sea  $G$  un dominio y  $K$  un compacto de Jordan,  $K \subset G$ , cuya frontera  $\partial K$  está orientada positivamente. Sea  $f$  una función holomorfa en  $G$ . Entonces*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 0.$$

Este teorema es un corolario inmediato de la fórmula de Cauchy–Green.

**Corolario.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\Omega$ . Si  $\Omega$  es simplemente conexo y  $\gamma$  es una curva de Jordan que está contenida en  $\Omega$ , entonces  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$ .*

## 30. El teorema de los residuos. La fórmula de Cauchy

Por un *entorno perforado* de un número complejo  $a$  entendemos un conjunto de tipo  $\dot{B}(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : z \neq a, |z - a| < r\}$ , donde  $0 < r < \infty$ .

**Definición.** Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\mathcal{D}(f)$  del plano complejo. Decimos que el punto  $a$  es una *singularidad aislada* de  $f$  si  $a$  no pertenece a  $\mathcal{D}(f)$ , pero existe un entorno perforado  $\dot{\mathcal{D}}(a, r)$  de  $a$  que está contenido en  $\mathcal{D}(f)$ .

Dada una función holomorfa  $f : \mathcal{D}(f) \rightarrow \mathbb{C}$  y un punto singular aislado  $a$  podemos clasificar esta singularidad de la siguiente forma.

**Definiciones.** 1) Se dice que  $a$  es una *singularidad evitable* de  $f$  si se puede definir el valor  $f(a)$  de manera que la nueva función sea holomorfa en  $\mathcal{D}(f) \cup \{a\}$ .

2) Se dice que  $a$  es un *polo* de  $f$  si  $a$  no es singularidad evitable de  $f$ , pero es una singularidad evitable de la función  $(z - a)^N f(z)$  para algún número natural  $N$ .

3) Decimos que  $a$  es una *singularidad esencial* de  $f$  si  $a$  no es ni singularidad evitable ni polo.

Está claro que si  $a$  es una singularidad evitable de  $f$ , entonces existe  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ , y la única forma de definir el valor  $f(a)$  para obtener una función holomorfa en  $\Omega \cup \{a\}$  es poniendo simplemente  $f(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Luego vamos a ver que es cierta también la afirmación inversa: si  $f$  tiene límite finito en el punto  $a$ , entonces  $a$  es una singularidad evitable. Más aún, se puede afirmar que  $a$  es una singularidad evitable de  $f$  sólo sabiendo que  $f$  está acotada en algún entorno perforado de  $a$ .

**Definición.** Sea  $a$  una singularidad aislada de una función holomorfa  $f$ , definida sobre un dominio  $G = \mathcal{D}(f)$ . Sea  $\gamma$  una curva de Jordan diferenciable a trozos, orientada positivamente, que está contenida en  $G$  y tal que  $f$  es holomorfa en el interior de  $\gamma$ , salvo en el punto  $a$ . *El residuo de  $f$  en  $a$*  se define como

$$\text{Res}_a f = \text{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz. \quad (30.1)$$

**Proposición 30.1.** *El residuo  $\text{Res}_a f$  no depende de la elección de la curva  $\gamma$ .*

*Demostración.* Sea  $\gamma$  una curva elegida según la definición, y sea  $\Delta$  una pequeña circunferencia centrada en  $a$  también con orientación positiva, que está contenida en el interior de  $\gamma$ . Observemos primero que la integral en (30.1) no cambia si sustituimos  $\gamma$  por  $\Delta$ . Esto es una consecuencia directa del Teorema de Cauchy, aplicada al compacto de Jordan, cuya frontera es la unión de curvas  $\gamma$  y  $\Delta$ .

Si tenemos dos curvas  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ , elegidas de acuerdo con la definición y si cogemos una circunferencia  $\Delta$  con las mismas propiedades que antes y que está contenida en los interiores tanto de  $\gamma_1$  como de  $\gamma_2$ , entonces obtenemos

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\Delta} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz. \quad \square$$

**Ejemplos.** 1) Consideremos la función  $f(z) = z^{-1}$ , que es holomorfa en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Calculemos su residuo en el origen. Para ello cogemos la curva



$\gamma = \{|z| = R\}$  en (30.1), donde el radio  $R > 0$  es arbitrario. Observemos que  $f(z) = \bar{z}/R^2$  para  $z \in \gamma$ . La integral de línea de  $f$  sobre la curva  $\gamma$  sólo depende de los valores de  $f$  en  $\gamma$ . Utilizando (29.3), obtenemos que

$$\operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i R^2} \int_{|z|=R} \bar{z} dz = 1.$$

2) Más generalmente, para todo  $a \in \mathbb{C}$  y todo  $n \in \mathbb{Z}$ ,

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = \begin{cases} 2\pi i, & \text{si } n = -1, \\ 0, & \text{si } n \neq -1. \end{cases} \quad (30.2)$$

Para obtener esta fórmula, elegimos la parametrización  $z = z(t) = a + Re^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  de la circunferencia y aplicamos la definición de la integral de línea. Si  $n \neq -1$ ,

$$\begin{aligned} \int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} (z(t)-a)^n z'(t) dt = \int_0^{2\pi} R^n e^{int} i R e^{it} dt \\ &= i R^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i R^{n+1} \left. \frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)} \right|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Si  $n = -1$ ,

$$\int_{|z-a|=R} (z-a)^n dz = i R^0 \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i.$$

Como era de esperar, en todos los casos, la respuesta no depende de  $R$ .

La fórmula (30.2) implica que

$$\operatorname{Res}_{z=a} (z-a)^n = \begin{cases} 1, & \text{si } n = -1, \\ 0, & \text{si } n \neq -1. \end{cases} \quad (30.3)$$

**Teorema 30.2** (Teorema de los residuos). *Sea  $K$  un compacto de Jordan. Sea  $f$  una función holomorfa en un entorno del compacto  $K$ , salvo en un número finito de puntos  $a_1, \dots, a_N$  en el interior de  $K$ . Entonces*

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \operatorname{Res}_{a_j} f, \quad (30.4)$$

donde la frontera  $\partial K$  se orienta positivamente.

*Demostración.* Quitando unos entornos de los puntos  $a_j$ , reduciremos este teorema al teorema de Cauchy. Sea  $\varepsilon > 0$  un número tan pequeño que todos

los discos cerrados  $\mathcal{D}(a_j, \varepsilon)$  estén contenidos en  $\text{int}K$  y no se intersequen entre sí. Ponemos

$$K_\varepsilon = K \setminus (\mathcal{D}(a_1, \varepsilon) \cup \dots \cup \mathcal{D}(a_N, \varepsilon)).$$

Dando la orientación positiva a las fronteras de los discos  $\mathcal{D}(a_j, \varepsilon)$ , obtenemos que la orientación positiva de la frontera del compacto de Jordan  $K_\varepsilon$  es

$$\partial K_\varepsilon = \partial K - \partial \mathcal{D}(a_1, \varepsilon) - \dots - \partial \mathcal{D}(a_N, \varepsilon).$$

La función  $f$  es holomorfa en un entorno de  $K_\varepsilon$ , por tanto, por el teorema de Cauchy,

$$0 = \int_{\partial K_\varepsilon} f(z) dz = \int_{\partial K} f(z) dz - \int_{\partial \mathcal{D}(a_1, \varepsilon)} f(z) dz - \dots - \int_{\partial \mathcal{D}(a_N, \varepsilon)} f(z) dz.$$

La fórmula de residuos (30.4) se sigue ahora de la definición del residuo:

$$\int_{\partial \mathcal{D}(a_j, \varepsilon)} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{a_j} f. \quad \square$$

**Teorema 30.3.** *Si  $f$  es holomorfa en un entorno de  $a$ , entonces*

$$\text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a} = 2\pi i f(a). \quad (30.5)$$

*Demostración.* Empezamos con la fórmula

$$\text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz,$$

que es válida para cualquier  $r$  suficientemente pequeño. Observemos que, según el Lema 28.1,

$$\left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz \right| \leq 2\pi \cdot \max_{z: |z-a|=r} |f(z) - f(a)| \rightarrow 0$$

cuando  $r \rightarrow 0+$ . Por lo tanto,

$$\int_{|z-a|=r} \frac{f(z) - f(a)}{z-a} dz = 0$$

para todo  $r$  tal que  $f$  es holomorfa en  $\mathcal{D}(a, r)$ . Finalmente,

$$\text{Res}_{z=a} \frac{f(z)}{z-a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(a)}{z-a} dz = f(a). \quad \square$$

**Teorema 30.4** (La fórmula de Cauchy). *Sea  $K$  un compacto de Jordan y sea  $f$  una función holomorfa en un dominio que contiene  $K$ . Entonces para cualquier  $z$  en el interior de  $K$ ,*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(s)}{s-z} ds. \quad (30.6)$$

Esta fórmula expresa los valores de  $f$  en el interior del compacto  $K$  a través de sus valores en la frontera de este compacto.

*Demostración del Teorema.* Podemos considerar  $z$  como un parámetro fijo. La función  $\frac{f(s)}{s-z}$  de la variable  $s$  es holomorfa en un entorno de  $K$ , excepto en el punto  $s = z$ . Aplicando el teorema de los residuos y la fórmula (30.5), obtenemos

$$\int_{\partial K} \frac{f(s)}{s-z} ds = 2\pi i \operatorname{Res}_{s=z} \frac{f(s)}{s-z} = 2\pi i f(z). \quad \square$$

**Corolario.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $G$  y  $\gamma$  una curva de Jordan, contenida en  $G$  junto con su interior. Si  $f$  se anula en  $\gamma$ , entonces  $f$  se anula también en el interior de  $\gamma$ .*

Efectivamente, la integral de Cauchy (30.6) bajo estas hipótesis vale 0 para todo  $z$  en el interior.  $\square$

*Observación.* Si  $f$  es holomorfa en  $K$  y  $z$  no pertenece a  $K$ , entonces la integral de Cauchy (30.6) vale 0, según el Teorema de Cauchy 29.3.

### Ejemplos de aplicación del teorema de los residuos

- 1) La integral  $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - a \cos \varphi + a^2}$ , donde  $a \in \mathbb{R}$ ,  $|a| < 1$ , vale  $\frac{2\pi}{1 - a^2}$ .
- 2)  $\int_0^\infty \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}$ .

Estos ejemplos son sólo una primera muestra de unas técnicas mucho más variadas de integrales complejas de línea, que permiten evaluar integrales definidas reales de muchos tipos. Estudiaremos estas técnicas al final del Capítulo IV, después de haber establecido la relación entre los residuos y los desarrollos de funciones en series del tipo  $\sum_{-\infty}^\infty c_n(z-a)^n$ , que se llaman series de Laurent.

## 31. La integral y la primitiva

**Definición.** Sean  $f$ ,  $G$  unas funciones continuas definidas en un dominio  $\Omega$ . Decimos que  $G(z)$  es una primitiva de  $f(z)$  si  $G$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $G'(z) = f(z)$ .

**Teorema 31.1.** Si  $G$  es una primitiva de  $f$  en  $\Omega$  y  $a, b \in \Omega$ , entonces

$$\int_{\gamma_{a,b}} f(z) dz = G(b) - G(a). \quad (31.1)$$

para toda curva  $\gamma_{a,b}$  contenida en  $\Omega$  que une a con b.

*Demostración.* La forma  $\omega = f(z) dz$  es exacta, y su primitiva en el sentido de §27 es  $G$ . Por lo tanto, el resultado sigue de (27.2).  $\square$

En particular, (31.1) implica que la integral  $\int_{\gamma_{a,b}} f(z) dz$  sólo depende de los extremos  $a, b$  de la curva  $\gamma_{a,b}$  y no depende de la elección de esta curva.

**Definición.** Sea  $f$  una función compleja continua en un dominio  $\Omega$ . Decimos que la integral de  $f$  no depende del camino en  $\Omega$  si para todo par de puntos  $a, b$  en  $\Omega$ , la integral  $\int_{\gamma_{a,b}} f(z) dz$  depende sólo de los puntos  $a, b$  y no de la curva  $\gamma_{a,b}$  que está contenida en  $\Omega$  y los une.

Está claro que la integral de  $f$  no depende del camino en un dominio si y sólo si  $\int_{\gamma_{a,b}} f(z) dz$  es nula para cualquier curva cerrada, contenida en este dominio.

Como hemos comprobado, si  $f$  tiene primitiva en un dominio, entonces su integral no depende del camino en este dominio.

Ahora vamos a suponer que  $\Omega$  es un dominio en  $\mathbb{C}$ ,  $f$  es continua en  $\Omega$  y la integral de  $f$  en  $\Omega$  no depende del camino. (Como veremos más adelante, esto implica que  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ .)

Fijamos un punto  $a$  en  $\Omega$ , y ponemos

$$G(z) = \int_a^z f(w) dw = \int_{\gamma_z} f(w) dw, \quad z \in \Omega, \quad (31.2)$$

donde  $\gamma_z$  es cualquier curva que une  $a$  con  $z$ . Por la hipótesis, la integral no depende de la elección de la curva  $\gamma_z$ , y por lo tanto está bien definida.

**Teorema 31.2.** Si la integral de  $f$  en  $\Omega$  no depende del camino y  $G(z)$  está definida por (31.2), entonces  $G$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $G$  es una primitiva de  $f$ .

*Demostración.* Fijemos un punto  $b$  en  $\Omega$ . Vamos a demostrar que  $G$  es holomorfa en  $b$  y  $G'(b) = f(b)$ , usando la definición de la derivada. Escogemos

un  $\varepsilon > 0$ . Sea  $\delta > 0$  un número tal que el disco  $\mathcal{D}(b, \delta) = \{z : |z - b| < \delta\}$  se contiene en  $\Omega$  y además se cumple

$$|f(z) - f(b)| < \varepsilon \quad \text{si } |z - b| < \delta. \quad (31.3)$$

Para cualquier  $h$  complejo tal que  $|h| < \delta$ , el intervalo  $[b, b+h]$  está contenido en  $\Omega$ . Escogemos  $\gamma_{b+h} = \gamma_b + [b, b+h]$ , donde por  $[b, b+h]$  entendemos la curva que traza este intervalo (parametrizada como  $z(t) = b + th$ ,  $t \in [0, 1]$ ). Entonces obtenemos:

$$\begin{aligned} G(b+h) - G(b) &= \int_{[b, b+h]} f(s) ds = \int_{[b, b+h]} (f(s) - f(b)) ds + \int_{[b, b+h]} f(b) ds \\ &= \int_{[b, b+h]} (f(s) - f(b)) ds + hf(b). \end{aligned}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \left| \frac{G(b+h) - G(b)}{h} - f(b) \right| &= \frac{1}{|h|} \left| \int_{[b, b+h]} (f(s) - f(b)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{|h|} \int_{[b, b+h]} |f(s) - f(b)| ds \leq \frac{1}{|h|} \int_{[b, b+h]} \varepsilon |ds| = \varepsilon, \end{aligned}$$

donde la última desigualdad se tiene en virtud de (31.3). Esto demuestra que existe el límite

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(b+h) - G(b)}{h} = f(b). \quad \square$$

La demostración de este teorema sigue siendo válida si la integral de  $f$  no depende del camino sólo para caminos poligonales. En este caso, definimos  $G$  por la misma fórmula (31.2), utilizando curvas  $\gamma_z$  poligonales.

**Teorema 31.3.** *Sea  $G_1$  una primitiva de  $f$  en un dominio  $\Omega$ . Entonces toda primitiva  $G$  viene dada por la fórmula*

$$G(z) = G_1(z) + C, \quad C = \text{const.}$$

**Corolario.** *Si  $f$  tiene primitiva en  $\Omega$ , entonces la integral de  $f$  en  $\Omega$  no depende del camino, y la forma general de la primitiva de  $f$  es*

$$G(z) = \int_a^z f(w) dw + C, \quad z \in \Omega,$$

donde  $C$  es una constante compleja.

**Teorema 31.4.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\Omega$  simplemente conexo. Entonces  $f$  tiene una primitiva en  $\Omega$ .*

*Demostración.* Demostraremos primero que la integral de  $f$  en  $\Omega$  no depende de camino. Por razones técnicas, sólo consideraremos caminos poligonales.

Fijemos un punto arbitrario  $a$  en  $\Omega$ . Sean  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dos curvas poligonales que empiezan en  $a$  y terminan en un punto  $b \in \Omega$ . Para demostrar que  $\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$ , tenemos que demostrar que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0, \quad (31.4)$$

donde  $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$  es una curva cerrada en  $\Omega$ . Demostraremos que esta integral es nula para cualquier curva  $\gamma$  cerrada poligonal. Razonamos utilizando inducción en el número de eslabones de  $\gamma$ .

Si  $\gamma$  consiste de 2 eslabones, entonces estos eslabones son el mismo intervalo con orientación opuesta, lo que implica (31.4) en este caso. Es la base de inducción.

Para hacer el paso inductivo, supongamos que se conoce (31.4) para todas curvas con menos de  $N$  eslabones, y sea  $\gamma$  una curva de  $N$  eslabones. Si  $\gamma$  tiene dos eslabones  $[s_1, s_2]$  y  $[s_2, s_3]$  contiguos tales que uno de estos eslabones está contenido en el otro, entonces la integral de  $f$  sobre  $\gamma$  se reduce a la integral de  $f$  sobre una curva cerrada poligonal con menor número de eslabones y por tanto es nula. Si  $\gamma$  es una curva de Jordan, la integral de  $f$  sobre  $\gamma$  es nula según el Corolario del Teorema de Cauchy. Si no se cumplen estas dos posibilidades, la curva  $\gamma$  tiene una intersección en un punto  $p \in \Omega$ . Entonces podemos descomponer  $\gamma = \alpha + \beta$ , donde  $\alpha, \beta$  son dos subarcs de  $\gamma$  que empiezan y terminan en  $p$ . Como tanto  $\alpha$  como  $\beta$  tienen menos eslabones que  $\gamma$ , la hipótesis inductiva nos dice que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha} f(z) dz + \int_{\beta} f(z) dz = 0 + 0 = 0.$$

Esto concluye el argumento inductivo.

Ahora usamos la fórmula (31.2) para definir una función  $G$  en  $\Omega$ . Según el Teorema 31.2,  $G$  tiene derivada  $\frac{dG}{dz}$ , que es igual a  $f$ .  $\square$

**Observaciones.** 1) Si  $G$  es un dominio no necesariamente simplemente conexo,  $f$  es una función holomorfa en  $G$  que tiene primitiva  $F$ , entonces

$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  para cualquier curva cerrada  $\gamma$ , contenida en  $G$ . Efectivamente, sea  $\gamma : [a, b] \rightarrow G$  con  $\gamma(b) = \gamma(a)$ . Entonces

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = 0. \quad \square$$

2) Para un dominio  $G$  que no es simplemente conexo, no necesariamente toda función holomorfa en  $G$  posee primitivas. Podemos tomar como ejemplo la función  $f(z) = \frac{1}{z}$ , que es holomorfa en el dominio no simplemente conexo  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . La fórmula  $\int_{|z|=R} f(z) dz = 2\pi i$  (ver (30.2)) y la observación anterior nos convencen en que  $f(z) = \frac{1}{z}$  no puede tener primitiva en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Se puede ver que en cualquier dominio no simplemente conexo siempre hay funciones holomorfas que no poseen primitivas.

3) Los anteriores comentarios sirven también para demostrar de nuevo que *no existe una rama del logaritmo en  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$* . Efectivamente, cualquier rama del logaritmo ha de satisfacer

$$e^{\log z} \equiv z.$$

Diferenciando, obtenemos que  $(\log z)' e^{\log z} \equiv 1$  y, finalmente,  $(\log z)' = 1/z$ . Por lo tanto, *una rama del logaritmo en un dominio es siempre una primitiva de  $1/z$* , lo que implica nuestra afirmación.  $\square$

El método que hemos utilizado en la demostración del Teorema 31.4 permite establecer también el siguiente resultado.

**Teorema 31.5.** *Sea  $G$  un dominio simplemente conexo y  $u$  una función armónica en  $G$ . Entonces existe una función armónica  $v$  en  $G$ , que es armónica conjugada a  $u$ .*

Para demostrar este resultado, podemos fijar un punto  $a \in G$ . La función  $v$  se expresa por la fórmula

$$v(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_z} -u'_y dx + u'_x dy,$$

donde  $\gamma_z$  es un camino poligonal que une  $a$  con  $z$  y está contenido en  $G$ . De la misma forma que en el Teorema 31.4, podemos deducir de la ecuación  $\Delta u = 0$  y del Teorema de Cauchy–Green que esta integral no depende del camino y, por tanto, define correctamente la función  $v$ . Luego, utilizando un argumento análogo al utilizado en el Teorema 31.2, demostramos que existen las derivadas parciales  $v'_x = -u'_y$ ,  $v'_y = u'_x$ , lo que demuestra que  $v$  es de clase  $\mathcal{C}^2(G)$  y que  $f \stackrel{\text{def}}{=} u + iv$  es holomorfa.

**Ejercicio.** Comprobar que la función  $u(x + iy) = x^3 - 3xy^2$  es armónica en todo el plano complejo. Encontrar su función armónica conjugada en  $\mathbb{C}$ .

## 32. Las series de potencias como funciones holomorfas

En esta sección demostraremos que *cualquier serie de potencias cuyo radio de convergencia no es nulo representa una función holomorfa dentro del disco de convergencia.*

Supongamos que tenemos una serie de potencias

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n. \quad (32.1)$$

Junto con ella, consideremos la serie

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n(z - a)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1}(z - a)^n. \quad (32.2)$$

Evidentemente, la serie (32.2) se obtiene diferenciando formalmente la serie (32.1). Denotemos por  $R_f$  y  $R_g$  los correspondientes radios de convergencia de estas series. Entonces

$$\begin{aligned} 1/R_g &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(n+1)|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}|^{1/n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} |c_{n+1}|^{1/(n+1)} = 1/R_f. \end{aligned}$$

**Lema 32.1.**  $f$  es holomorfa en  $\{z : |z - a| < R_f\}$ , y su derivada es igual a  $g$ .

*Demostración.* La función  $g$  es continua, y la serie (32.2) converge uniformemente en cualquier disco  $|z - a| < r$  de radio más pequeño que  $R_g$ . Sea  $\gamma_z$  cualquier curva que esté contenida en  $\{|z - a| < R_g\}$  y que conecte  $a$  con  $z$ . Como  $\gamma_z$  está contenida en un disco centrado en  $a$  de un radio menor que  $R_g$ , la serie (32.2) converge uniformemente sobre  $\gamma_z$ . Utilizando el apartado b) del Lema 28.3:

$$\int_{\gamma_z} g(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma_z} n c_n (t - a)^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z - a)^n = f(z) - c_0.$$



En particular, vemos que la integral de  $g$  no depende del camino seguido en el disco  $|z - a| < R_g (= R_f)$ . Según el Teorema 31.2, la función  $f(z) - c_0$  es holomorfa y su derivada es igual a  $g$ . Concluimos que existe la derivada compleja  $f'(z) = g(z)$ .  $\square$

Aplicando este lema varias veces, llegamos al siguiente resultado.

**Teorema 32.2.** *Supongamos que (32.1) tiene el radio de convergencia  $R > 0$ . Entonces*

- 1)  $f$  es holomorfa en  $\{z : |z - a| < R\}$ ;
- 2)  $f$  es diferenciable en este disco infinitas veces en el sentido complejo;
- 3) Toda derivada  $f^{(m)}$  se desarrolla en una serie de potencias que se obtiene derivando  $m$  veces la serie (32.1) (aquí  $m = 1, 2, \dots$ ).
- 4) Las series obtenidas tienen el mismo radio de convergencia.

**Corolario.** *Supongamos que  $f$  viene dada por el desarrollo en serie de potencias (32.1). Entonces*

- 1) Los coeficientes  $c_n$  del desarrollo de  $f$  se expresan como

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}; \quad (32.3)$$

- 2) Existe sólo una serie de potencias cuya suma en un disco centrado en  $a$  (de radio no nulo) es igual a  $f$ .

Mencionaremos los siguientes desarrollos de funciones clásicas en series de potencias:

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots; \\ (1+z)^p &= 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} z^n + \dots \end{aligned}$$

Ambos desarrollos son válidos para  $|z| < 1$ . Aquí consideramos la rama principal del logaritmo y ponemos

$$(1+z)^p \stackrel{\text{def}}{=} e^{p \log(1+z)}.$$

### 33. El desarrollo de funciones holomorfas en series de potencias

Los resultados del apartado anterior no dicen qué funciones holomorfas pueden ser desarrolladas en una serie de potencias. Aquí demostraremos el siguiente resultado.

**Teorema 33.1.** Supongamos que  $f(z)$  es holomorfa en  $\{z : |z - a| < R\}$ . Entonces

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n, \quad |z - a| < R, \quad (33.1)$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=\rho} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds \quad (33.2)$$

(aquí  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$  es arbitrario).

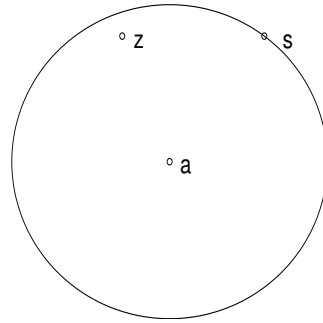


Figura 1

*Demostración.* Fijamos una circunferencia  $\mathcal{C}_\rho = \{s : |s - a| = \rho\}$  y un punto  $z$  dentro de ella, y aplicamos la fórmula de Cauchy:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=\rho} \frac{f(s)}{s-z} ds, \quad |z-a| < \rho.$$

Como  $\left| \frac{z-a}{s-a} \right| < 1$  para  $s$  en la circunferencia (ver Fig. 1), podemos escribir el desarrollo

$$\frac{1}{s-z} = \frac{1}{(s-a) - (z-a)} = \frac{1}{s-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{s-a}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}}. \quad (33.3)$$

Se puede afirmar además que  $\max_{s:|s-a|=\rho} \left| \frac{z-a}{s-a} \right| < \text{const} < 1$ . Usando el criterio  $M$  de Weierstrass, deducimos que para cualquier  $z$  fijo dentro de la circunferencia  $\mathcal{C}_\rho$ , la serie en (33.3) converge uniformemente para  $s \in \mathcal{C}_\rho$ . Esta convergencia uniforme se mantiene si multiplicamos la serie (33.3) por la función  $f(s)$ , que es acotada en  $\mathcal{C}_\rho$ . Aplicando el Lema 28.3, obtenemos el desarrollo (33.1).  $\square$

**Corolario 1.** *Cualquier función holomorfa en un disco  $B(a, r)$  se representa por su serie de Taylor centrada en el centro de este disco.*

**Corolario 2.** *Cualquier función holomorfa es diferenciable infinitas veces en el sentido complejo y todas sus derivadas son holomorfas.*

Esto sigue del Teorema anterior y del Teorema 32.2.

**Comentario.** Vamos a repetir el cálculo (33.3), suponiendo ahora que  $z$  está en el exterior de la circunferencia  $\mathcal{C}_\rho = \{s : |s - a| = \rho\}$ :

$$\frac{1}{s - z} = -\frac{1}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{s-a}{z-a}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-a)^n}{(z-a)^{n+1}} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-a)^n}{(s-a)^{n+1}} \quad (33.4)$$

(hemos cambiado  $n$  por  $-n-1$  en la última expresión). Razonando de forma análoga al Teorema 33.1, obtenemos el siguiente lema.

**Lema 33.2.** *Sea  $f$  una función compleja continua sobre una circunferencia  $\mathcal{C}_\rho = \{s : |s - a| = \rho\}$ . Definimos los coeficientes  $c_n$  asociados a  $f$  a partir de la fórmula (33.2). Entonces se tiene el desarrollo*

$$\int_{\mathcal{C}_\rho} \frac{f(s)}{s - z} ds = -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - a)^n, \quad (33.5)$$

que converge para cualquier  $z$ ,  $|z - a| > \rho$ .

En la parte izquierda de (33.5) tenemos una integral de Cauchy, pero en este lema no suponemos que  $f$  sea holomorfa dentro del contorno  $\mathcal{C}_\rho$ . Este lema nos será útil en el estudio de series de Laurent.

**Corolario 3.** *Cualquier función armónica en un dominio  $G$  es diferenciable infinitas veces en este dominio en el sentido real.*

Para demostrarlo, se puede aplicar el Teorema 31.5 y el Corolario 2 a la restricción de nuestra función a un disco arbitrario que está contenido en  $G$ .  $\square$

**Corolario 4.** *Supongamos que  $f$  es holomorfa en un disco  $\{z : |z - a| < R\}$  y sea (33.1) su desarrollo de Taylor. Entonces para cualquier  $\rho$ ,  $0 < \rho < R$  se tiene la estimación de Cauchy:*

$$|c_n| \leq \frac{\max_{|s-a|=\rho} |f(s)|}{\rho^n}. \quad (33.6)$$

**Corolario 5.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\Omega$  y sea  $K$  un compacto de Jordan, contenido en  $\Omega$ . Entonces para todo  $z$  en el interior de  $K$  y para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se cumple la fórmula de la representación*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds. \quad (33.7)$$

Efectivamente,  $f^{(n)}$  es holomorfa en  $\Omega$ . Comparando (32.3) y (33.2), vemos que la fórmula (33.7) es cierta si en vez de integrar sobre  $\partial K$ , integramos sobre una pequeña circunferencia  $\mathcal{C}_\rho = \{s : |s-z| = \rho\}$ , orientada positivamente. El teorema de Cauchy, aplicado al compacto  $K$  menos el interior de esta circunferencia, nos dice que

$$\int_{\partial K} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds = \int_{\mathcal{C}_\rho} \frac{f(s)}{(s-z)^{n+1}} ds. \quad \square$$

Obsérvese que la fórmula (33.7) no es nada más que la fórmula de Cauchy (30.6), derivada formalmente  $n$  veces. Se puede obtenerla, justificando esta diferenciación.

**Teorema 33.3** (Teorema de Morera). *Sea  $f$  una función continua en un dominio  $\Omega$ . Si la integral  $\int_\gamma f(z) dz$  es nula para cualquier curva cerrada  $\gamma$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es holomorfa en este dominio.*

*Demostración.* Como la integral de  $f$  no depende del camino, existe su primitiva  $G$  en  $\Omega$ . Entonces  $G$  es holomorfa y  $G' = f$ . Por el Corolario 2,  $f$  también es holomorfa en  $\Omega$ .  $\square$

Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $G$  en el plano complejo, y sea  $a$  un punto de este dominio. Entonces podemos desarrollar  $f$  en una serie de potencias en el punto  $a$ , que necesariamente va a ser una serie de Taylor:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

(ver el Teorema 33.1 y la fórmula (32.3)). El Teorema 33.1 implica también que *el disco de convergencia de esta serie es el mayor disco centrado en  $a$  en el que  $f$  es holomorfa (o puede prolongarse como una función holomorfa).*<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>En realidad, aquí utilizamos implícitamente la unicidad de estas prolongaciones, que se va a demostrar posteriormente en el Lema 40.2.

## 34. La función arcotangente

Aquí daremos una de las posibles definiciones de  $\arctan z$  para valores de  $z$  complejos. Utilizaremos esta discusión para dar dos ejemplos de evaluación del “mayor disco de holomorfa” de una función, del que acabamos de hablar.

**Ejemplos.** 1) Consideremos la función  $f(z) = 1/(z^2+1) = (z+i)^{-1}(z-i)^{-1}$ . Su desarrollo de Taylor en el origen es

$$f(z) = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots, \quad |z| < 1 \quad (34.1)$$

(se obtiene sustituyendo  $w = z^2$  en la serie geométrica  $1/(w+1) = 1 - w + w^2 - w^3 + \dots$ ,  $|w| < 1$ ). Como  $\lim_{z \rightarrow i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} f(z) = \infty$ , se ve que no existe una extensión holomorfa de  $f(z)$  del disco  $|z| < 1$  a un disco  $\mathcal{D}(0, R)$  de un radio  $R$  más grande. Ésta es la razón por la que el radio de convergencia del desarrollo de  $f$  en el origen es igual a 1 desde el punto de vista del comportamiento de  $f$  cerca de la frontera del disco  $\mathcal{D}(0, 1)$ . Por supuesto, la fórmula de Hadamard (14.2) da el mismo resultado.

2) La serie

$$F(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots, \quad |z| < 1 \quad (34.2)$$

se obtiene integrando la serie (34.1) y por tanto, tiene el mismo radio de convergencia. Podemos afirmar que

$$F(z) = \int_0^z f(w) dw, \quad |z| < 1,$$

donde se entiende que podemos integrar sobre cualquier curva que conecte 0 y  $z$  y esté contenida en el disco  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ . La integral no depende del camino en  $\mathbb{D}$ . Si nos restringimos a los valores de  $z$  reales en el intervalo  $(-1, 1)$ , entonces podemos considerar esta integral como una integral real. Llegamos a la conclusión que

$$F(x) = \arctan t \Big|_0^x = \arctan x, \quad x \in (-1, 1).$$

Por consiguiente, la función  $F$ , definida de esta forma, es *una continuación holomorfa* de la función  $\arctan \Big|_{(-1,1)}$  al disco  $\mathbb{D}$ .

Por otro lado,

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^z \frac{1}{w^2+1} dw = \frac{1}{2} \int_0^z \left( \frac{1}{1+iw} + \frac{1}{1-iw} \right) dw \\ &= \frac{1}{2} [-i \log(1+iw) + i \log(1-iw)] \Big|_{w=0}^{w=z}. \end{aligned} \quad (34.3)$$

En este cálculo, hemos de precisar qué ramas de las funciones  $\log(1 + iw)$  y  $\log(1 - iw)$  se escogen. Podemos entender en ambos casos por el logaritmo su rama principal. La función  $-i \log(1 + iw) + i \log(1 - iw)$  está definida si  $1 \pm iw \notin (-\infty, 0]$ , es decir, está definida en el dominio

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$$

(el plano complejo con dos cortes). Este dominio es simplemente conexo. Por tanto, la integral  $F(z) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^z \frac{dw}{w^2+1}$  no depende del camino en  $G$  y define una función holomorfa en este dominio. Según (34.3),

$$F(z) = \frac{1}{2}[-i \log(1 + iz) + i \log(1 - iz)]. \quad (34.4)$$

Como  $\mathbb{R} \subset G$ , vemos que

$$\arctan(x) = \frac{1}{2}[-i \log(1 + ix) + i \log(1 - ix)]$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Ésta es una expresión compleja de la función  $\arctan$  en términos del logaritmo, y la función  $F$  es una extensión holomorfa del arcotangente al dominio  $G$ .

La fórmula (34.4) implica que

$$\lim_{z \in G, z \rightarrow \pm i} |F(z)| = +\infty,$$

luego *no puede existir una extensión holomorfa de  $F$  a un disco  $\mathcal{D}(0, R)$  de radio mayor que 1.*

Ésta es una explicación de porqué el desarrollo (1.3) de la arcotangente en el origen sólo converge en el disco de radio 1.

**Ejercicio.** Sea  $F$  la función (34.4), definida en  $G$ . Calcular los límites

$$F_{\pm}(iy) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} F(x + iy),$$

donde  $y \in \mathbb{R}$ . Considerar los casos  $|y| < 1$ ,  $|y| = 1$  y  $|y| > 1$ .

# Capítulo IV. Series de Laurent y residuos.

## 35. Series de Laurent

Por una serie de Laurent centrada en un punto  $a$  del plano complejo entendemos una serie del tipo

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n. \quad (35.1)$$

Se suele dividir esta serie en dos:  $f(z) = f_+(z) + f_-(z)$ , donde

$$f_-(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-a)^n, \quad (35.2)$$

$$f_+(z) = \sum_0^{\infty} c_n(z-a)^n. \quad (35.3)$$

Llamando  $t = (z-a)^{-1}$ , podemos expresar la serie para  $f_-$  como una serie de potencias positivas de la nueva variable  $t$ :

$$f_-(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}t^n, \quad t = (z-a)^{-1}. \quad (35.4)$$

Decimos que la serie de Laurent (35.1) converge (para un valor determinado de  $z$ ) si convergen ambas series para  $f_-$  y para  $f_+$ . Definimos *la suma de la serie* (35.1) como  $f(z) \stackrel{\text{def}}{=} f_-(z) + f_+(z)$ .

Sean  $R$  el radio de convergencia de la serie (35.3) y  $\tau$  el radio de convergencia de la serie (35.4). Entonces (35.3) converge para  $|z-a| < R$  (y posiblemente en algunos puntos de la frontera) y (35.2) para  $|t| < \tau$ , es decir, para  $|z-a| > \tau^{-1}$ . Ponemos  $r = \tau^{-1}$ . Para que el dominio de convergencia de nuestra serie de Laurent no sea vacío, tenemos que suponer que  $r \leq R$ . Sólo vamos a estudiar el caso en que  $r < R$  (entonces el conjunto donde converge la serie de Laurent tiene puntos interiores). Llamando  $r$  al *radio interior* de convergencia de la serie de Laurent y  $R$  al *radio exterior*, vemos que la serie de Laurent converge para

$$r < |z-a| < R$$

y diverge si  $|z-a| < r$  o  $|z-a| > R$ . Los casos  $r = 0$  y/o  $R = \infty$  son posibles. Está claro que la serie de Laurent respresenta una función holomorfa dentro del anillo de convergencia.

**Teorema 35.1.** *Dada una serie de Laurent con radio de convergencia interior  $r$  y radio de convergencia exterior  $R$ , donde  $0 \leq r < R \leq \infty$  y números  $r', R'$  cualesquiera con  $r < r' < R' < R$ , esta serie converge uniformemente en el anillo  $r' < |z-a| < R'$ . Se puede expresar los coeficientes de Laurent como*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=\rho} \frac{f(s)}{(s-a)^{n+1}} ds, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (35.5)$$

*Para estos coeficientes se tienen estimaciones de Cauchy, que tienen exactamente la misma forma que en (33.6):*

$$|c_n| \leq \frac{\max_{|s-a|=\rho} |f(s)|}{\rho^n}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (35.6)$$

*Aquí  $\rho$  es cualquier radio tal que  $r < \rho < R$ .*

Este teorema se sigue directamente de los resultados sobre la convergencia uniforme de las series de potencias para  $f_+$  y  $f_-$ . La expresión de los coeficientes se obtiene integrando la fórmula (35.1) término a término y aplicando (30.2).

**Teorema 35.2.** *Sean  $0 \leq r < R \leq \infty$  y sea  $f(z)$  una función holomorfa en el anillo  $r < |z-a| < R$ . Entonces se tiene un desarrollo (35.1), donde los coeficientes  $c_n$  se determinan con (35.5). Este desarrollo converge para todo  $z$  en el anillo  $r < |z-a| < R$ .*

**La demostración** se obtiene a partir de la fórmula de Cauchy, aplicada a un anillo  $r' < |z-a| < R'$  con  $r < r' < R' < R$ :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|s-a|=R'} \frac{f(s)}{s-z} ds - \int_{|s-a|=r'} \frac{f(s)}{s-z} ds$$

(damos orientación positiva a las dos cirunferencias). Al desarrollar el núcleo de Cauchy  $\frac{1}{s-z}$  según la fórmula (33.4) en la primera integral y según la fórmula (33.3) en la segunda, se llega al desarrollo (35.1)–(35.5).

Observamos también la unicidad del desarrollo de una función en una serie de Laurent en un anillo fijo y la independendencia de los coeficientes  $c_n$  del radio  $\rho$  intermedio.

La serie (35.2) se llama *la parte principal* de la serie de Laurent (35.1).



**Ejemplos.** Desarrollar en la serie de Laurent en un entorno de  $z = 0$  las siguientes funciones:

$$(ii) \cos \frac{1}{z} \quad (i) \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \quad (iii) \frac{1}{(z^2 + 1)^2} \quad (iv) z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{z}.$$

Indicar cuál es la parte principal de estas series.

## 36. Tipos de singularidades aisladas de funciones holomorfas

Sea  $f$  una función holomorfa (en un dominio) y sea  $a$  una singularidad aislada de  $f$ . Por definición, esto significa que  $f$  es holomorfa en un disco perforado  $\dot{\mathcal{D}}(a, \varepsilon) = \{z : 0 \neq |z - a| < \varepsilon\}$  centrado en  $a$ . Recordamos que en la Sección 30 hemos clasificado las singularidades aisladas de funciones holomorfas en tres categorías: *singularidades evitables*, *polos* y *singularidades esenciales*.

El conjunto  $\dot{\mathcal{D}}(a, \varepsilon)$  es un caso particular de un anillo con el radio interior 0 y el radio exterior  $\varepsilon$ . Según la sección anterior, existe un desarrollo de  $f(z)$  en una serie de Laurent (35.1) que converge (al menos) en  $\dot{\mathcal{D}}(a, \varepsilon)$ . Llamaremos este desarrollo *el desarrollo de Laurent de  $f$  en  $a$* . Aquí relacionaremos el tipo de singularidad de  $f$  en  $a$  con la forma de la parte principal de este desarrollo de Laurent.

**Teorema 36.1** (Caracterización de singularidades evitables). *Sea  $a$  una singularidad aislada de una función holomorfa  $f$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- 1) *La parte principal de la serie de Laurent de  $f$  en  $a$  es idénticamente nula;*
- 2) *Existe el límite finito  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) \in \mathbb{C}$ ;*
- 3)  *$f$  es acotada en un entorno de  $a$ ;*
- 4)  *$f$  se extiende a una función holomorfa en un entorno de  $a$ , es decir,  $a$  es una singularidad evitable de  $f$ .*

*Demostración.* Es obvio que 1)  $\implies$  2)  $\implies$  3). Para ver que 3)  $\implies$  1), supongamos que  $|f| < M$  en un entorno perforado de  $a$ . Aplicamos las estimaciones de Cauchy (35.6) con un radio  $\varepsilon > 0$  pequeño:

$$|c_n| \leq \frac{M}{\varepsilon^n} = M\varepsilon^{-n} \rightarrow 0 \quad \text{cuando } \varepsilon \rightarrow 0,$$

si  $n < 0$ . Luego  $c_n = 0$  para todo  $n < 0$ .

Obviamente, 1)  $\Leftrightarrow$  4). □

**Teorema 36.2** (Caracterización de polos). *Sea  $a$  una singularidad aislada de una función holomorfa  $f$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- 1) *Existe el límite  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ ;*
- 2)  $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ , *donde  $g$  es holomorfa en  $\mathcal{D}(f) \cup \{a\}$ ,  $g(a) \neq 0$  y  $m$  es un número natural positivo;*
- 3)  $f$  *se expresa en un entorno de  $a$  como  $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ , donde  $g$  y  $h$  son holomorfas en un entorno de  $a$ , pero  $a$  no es una singularidad evitable de  $f$ ;*
- 4) *La parte principal de la serie de Laurent de  $f$  en  $a$  no es idénticamente nula y tiene un número finito de términos no nulos;*
- 5)  $a$  *es un polo de  $f$ .*

*Demostración.* Es fácil ver que  $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 4)$ . (la implicación  $1) \Rightarrow 2)$  se basa en la observación que  $a$  es una singularidad evitable de  $1/f$ ).

Para demostrar que  $3) \Rightarrow 1)$ , sacamos las máximas potencias de  $(z-a)$  de los desarrollos de Taylor de  $g$  y  $h$  en un entorno de  $a$ :

$$g(z) = g_1(z)(z-a)^k, \quad h(z) = h_1(z)(z-a)^l,$$

donde  $k, l$  son números enteros no negativos,  $g_1, h_1$  son holomorfas en un entorno de  $a$  y  $g_1(a) \neq 0, h_1(a) \neq 0$ . Obtenemos así la representación

$$f(z) = (z-a)^{k-l} \frac{g_1}{h_1}(z)$$

en un entorno de  $a$ , donde  $\frac{g_1}{h_1}$  es holomorfa en un entorno de  $a$ . Como  $a$  no es una singularidad evitable de  $f$ ,  $k-l < 0$ . Por tanto,  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$ .

Supongamos que se cumple 1), y vamos a demostrar 3). La función  $h \stackrel{\text{def}}{=} 1/f$  tiene límite 0 en  $a$ . Según el teorema anterior, al poner  $h(a) = 0$ ,  $h$  se convierte en una función holomorfa en un entorno de  $a$ . Como  $f = \frac{1}{h} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g}{h}$ , hemos obtenido 3).

Hemos demostrado que  $1) \Leftrightarrow 2) \Leftrightarrow 3) \Leftrightarrow 4)$ . Por definición del polo,  $2) \Leftrightarrow 5)$ . □

El siguiente resultado se llama *el Teorema de Casorati - Weierstrass*.

**Teorema 36.3** (Caracterización de singularidades esenciales). *Sea  $a$  una singularidad aislada esencial de una función holomorfa  $f$ . Entonces para cualquier  $b \in \mathbb{C}$ , la función  $f$  toma valores arbitrariamente cercanos a  $b$  en puntos arbitrariamente cercanos de  $a$ .*

*Es decir, para todo  $\varepsilon > 0$  existen unos números  $a', b'$  con  $a' \neq a, |a-a'| < \varepsilon, |b-b'| < \varepsilon$  tales que  $f(a') = b'$ .*

*Demostración.* Supongamos lo contrario, y vamos a ver que ésto nos lleva a una contradicción. Estamos suponiendo que para algún  $\varepsilon$  pequeño,  $f(z)$  no toma en el disco  $|z - a| < \varepsilon$ , valores  $w$  que estén en el disco  $|w - b| < \varepsilon$ . Entonces

$$\left| \frac{1}{f(z) - b} \right| < \frac{1}{\varepsilon}$$

en un entorno perforado de  $a$ , es decir, la función  $1/(f(z) - b)$  está acotada cerca del punto  $a$ . Por el teorema 36.1,  $a$  es una singularidad evitable de  $1/(f - b)$ :  $1/(f(z) - b) = \varphi(z)$ , donde  $\varphi$  es holomorfa en un entorno de  $a$ . Luego  $f = b + \frac{1}{\varphi} = \frac{b\varphi + 1}{\varphi}$ , donde tanto  $b\varphi + 1$  como  $\varphi$  son holomorfas en un entorno de  $a$ . Por el Teorema 36.2,  $a$  es una singularidad evitable o un polo de  $f$ , lo que contradice a la hipótesis. El teorema queda demostrado.  $\square$

Se tiene, de hecho, un resultado mucho más fuerte, que se llama *el Teorema Grande de Picard*. Este teorema afirma que si  $a$  es una singularidad esencial de  $f$ , entonces para todo entorno perforado  $|z - a| < \varepsilon$  de  $a$ ,  $f$  omite a lo sumo un valor complejo en este entorno. Se demostrará en el curso de Variable Compleja II.

## 37. El orden de cero y el orden del polo.

Sea  $a \in \mathbb{C}$ . Supongamos que  $f$  es una función holomorfa en el punto  $a$ , que no es nula, ó bien que  $a$  es una singularidad aislada de  $f$  de tipo “polo” o “singularidad evitable”. En todos estos casos, se tiene un desarrollo

$$f(z) = \sum_{n=M}^{\infty} c_n(z - a)^n \quad (37.1)$$

en un disco perforado  $\dot{B}(a, r)$  centrado en  $a$ . Aquí el número entero  $M$  puede ser tanto negativo como positivo. Si pedimos que el primer coeficiente  $c_M$  de este desarrollo sea no nulo, entonces  $M$  se determina de forma única.

**Definición.** Sea  $f \not\equiv 0$  holomorfa en  $B(a, r)$  o en  $\dot{B}(a, r)$  (en este último caso suponemos que  $a$  no es una singularidad esencial de  $f$ ). Sea (37.1) el desarrollo de  $f$  en potencias de  $z - a$  en  $\dot{B}(a, r)$ . El número  $M$ , definido de la forma indicada, se llama *el orden de cero* de  $f$  en  $a$  y se denota por  $\text{ord}_a f$ :

$$\text{ord}_a f \stackrel{\text{def}}{=} M.$$

Si  $M = \text{ord}_a f$  es negativo, se habla también del *orden de polo* de  $f$  en  $a$ , definiéndolo como  $-\text{ord}_a f = -M > 0$ .

**Ejemplos.** 1)  $\text{ord}_a(z - a)^5 = 5$ ;  $\text{ord}_a(z - a)^{-12} = -12$ ;  $\text{ord}_i(z^2 + 1)^2 = 2$ . La función  $(z - a)^{-12}$  tiene un polo de orden 12 en el punto  $z = a$ . La función  $(z - a)^5$  tiene en el punto  $a$  un cero de orden 5.

2) La serie de potencias para la función

$$f_1(z) = \frac{\text{sen } z}{z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!}$$

(ver (6.2)) converge en todo el plano. La función  $f_1$ , definida por esta serie, es continua en todo el plano; por lo tanto,  $z = 0$  es una singularidad evitable de esta función. Como el coeficiente libre  $c_0 = 1$  de este desarrollo no es nulo, vemos que  $\text{ord}_{z=0} \frac{\text{sen } z}{z} = 0$ .

2) De forma análoga, aplicando el desarrollo (8.1) de la función  $e^z$  en la serie de potencias, se obtiene que la función  $\frac{e^z - 1}{z^{10}}$  tiene orden de cero  $-9$  en el origen, es decir, tiene un polo de orden 9 en el punto 0.

3) Tenemos el desarrollo

$$\frac{\cos z - 1}{z} = -\frac{z}{2} + \frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \dots$$

Por tanto, la función  $\frac{\cos z - 1}{z}$  tiene singularidad evitable en  $z = 0$ , y  $\text{ord}_{z=0} \frac{\cos z - 1}{z} = 1$ .

**Lema 37.1.** Sean  $f$  y  $g$  dos funciones holomorfas no nulas en un entorno perforado de un número complejo  $a$  (que no es su singularidad esencial). Entonces

1)  $\text{ord}_a f = M$  si y sólo si existe el límite  $\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^{-M} f(z)$ , es finito y no nulo;

2)  $\text{ord}_a(f \cdot g) = \text{ord}_a f + \text{ord}_a g$ ;

3)  $\text{ord}_a\left(\frac{f}{g}\right) = \text{ord}_a f - \text{ord}_a g$ . En particular, si  $f$  y  $g$  son holomorfas en  $a$ , entonces  $\frac{f}{g}$  ó bien tiene un polo, o bien una singularidad evitable en  $a$ .

## 38. Fórmulas de cálculo de residuos

**Teorema 38.1.** Sea  $f$  una función holomorfa en un entorno perforado de un punto  $a$ , y sea

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n \quad (38.1)$$

su desarrollo de Laurent en este entorno. Entonces

$$\operatorname{Res}_a f = c_{-1}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es holomorfa en el disco perforado  $0 < |z - a| < r$ . Cogemos un radio  $\rho$ ,  $0 < \rho < r$ . Entonces

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\rho} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{|z-a|=\rho} c_n (z-a)^n dz = c_{-1}.$$

En la última igualdad hemos aplicado (30.2). Se puede intercambiar el orden de sumación y de integración porque la serie de Laurent de  $f$  converge uniformemente en la circunferencia  $|z - a| = \rho$ .  $\square$

**Teorema 38.2** (Cálculo del residuo en un polo simple). *Supongamos que en un entorno perforado del punto  $a$  se tiene la representación*

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)},$$

donde  $g$  y  $h$  son funciones holomorfas en un entorno (**no perforado**) de  $a$  y además,

$$h(a) = 0, \quad h'(a) \neq 0.$$

Entonces  $a$  es una singularidad evitable o un polo simple de  $f$ , y

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

*Demostración.* Por las hipótesis,  $h(z) = (z - a)h_1(z)$ , donde  $h_1$  es holomorfa en  $a$  y  $h_1(a) = h'(a) \neq 0$ . Aplicando la fórmula de Cauchy a una circunferencia  $|z - a| = \varepsilon$  de radio pequeño, obtenemos

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=\varepsilon} \frac{\frac{g(z)}{h_1(z)}}{z-a} dz = \frac{g(a)}{h_1(a)} = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

$\square$

**Teorema 38.3** (Cálculo del residuo en un polo múltiple). *Sea  $a$  un polo de orden  $N$  de una función holomorfa  $f$ . Entonces*

$$\operatorname{Res}_a f = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \rightarrow a} [(z-a)^N f(z)]^{(N-1)}.$$

**Ejemplos.** Calcular el orden del polo en el origen y el residuo de la función  $f$  en los siguientes casos:

$$(i) f(z) = \frac{1}{z \operatorname{sen}^2 z} \quad (ii) f(z) = \frac{\tan z}{z^n}, \quad n \geq 1.$$

## 39. Cálculo de integrales definidas con métodos de variable compleja

Recordamos que conocemos al menos dos métodos bastante generales de cálculo de integrales definidas.

- (1) Mediante el cálculo de primitivas;
- (2) Mediante la diferenciación respecto del parámetro.

Recordamos también que, dada una función que se expresa en funciones elementales, su primitiva, la mayoría de las veces ya no tiene esta expresión.

Podemos agregar que otros ejemplos de cálculo de integrales definidas de una variable que sería difícil o imposible calcular a través de primitivas se obtienen del Teorema de Fubini.

En este tema, que tiene carácter más práctico, tenemos que estudiar otro método bastante general para calcular la integral definida de una función sin calcular su primitiva. Este método consiste en expresar nuestra integral definida a través de una integral de línea de una función analítica (con algunas singularidades). Luego se intenta utilizar el Teorema de residuos para encontrar el valor numérico de nuestra integral.

En este curso aprenderemos diferentes modificaciones de este método para el cálculo de integrales de varios tipos. Existen detalladas exposiciones de estos métodos, ver, por ejemplo, [20, 17, 4] y otros. Los libros [20, 4, 24] contienen colecciones de problemas bastante amplias. Aquí sólo precisaremos los tipos de integrales que consideramos que es importante (y posible) aprender en este curso, dando un ejemplo para cada clase de ellas.

Hay que subrayar que para aprender bien este tema, se necesita un buen dominio de muchos temas anteriores, tales como los desarrollos en series de potencias y en series de Laurent, tipos de singularidades y residuos. Es imprescindible también la destreza en el manejo elemental de números complejos, potencias, logaritmos, etc.

Es por ello (y no sólo por la importancia de poder obtener valores numéricos de integrales) que consideramos este tema como la culminación del curso.

Los tipos de integrales que se aprenderán a través de los problemas son los siguientes:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{x^6 + 1}; & \text{(b) V.P.} \quad & \int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sen} x}{x}; & \text{(c) V.P.} \quad & \int_{\mathbb{R}} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + b^2}; \\ \text{(d)} \quad & \int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x + 1} dx; & \text{(e)} \quad & \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + \cos \theta)^2} \end{aligned}$$

(aquí  $\alpha \in (-1, 0)$ ,  $a > 1$ ,  $b > 0$ ; V.P. significa el valor principal de la integral). Consideramos importante el cálculo de integrales de tipo (d), porque esto

permite entender la ramificación de la función  $z^a$ .

En la resolución de la integral (a), la notación  $\varepsilon = e^{2\pi i/12}$  (de tal forma que las raíces de  $z^6 + 1$  con  $\text{Im } z > 0$  son  $\varepsilon, \varepsilon^3$  y  $\varepsilon^5$ ) permite hacer el cálculo de forma más eficiente.

Se puede intentar también algunas de las siguientes integrales un poco más sofisticadas:

$$\begin{aligned} \text{(f)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ay}}{1 + be^y}; \quad \text{(g)} \int_0^{\infty} \frac{\log x}{(x^2 + b^2)^2}; \quad \text{(h)} \int_0^{\infty} \frac{\log^2 x}{x^2 + b^2}; \\ \text{(i)} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx; \quad \text{(j)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} e^{-x^2} dx; \quad \text{(k)} \int_0^{\infty} e^{ix^p} dx \end{aligned}$$

(donde  $0 < a < 1$ ,  $p > 1$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ). Es importante utilizar en la clase ejemplos sin demasiados cálculos, donde aparezcan tanto polos simples como múltiples. La integral (j) es la transformada de Fourier de la función  $e^{-x^2}$ , cuya fórmula es importante en Análisis Real (la introducción de la integral de Fourier) y en Teoría de Probabilidad.

El lema de Jordan puede ser explicado en ejemplos, sin dar su enunciado general.

# Capítulo V. Propiedades globales de las funciones holomorfas.

## 40. Ceros de funciones holomorfas. Teorema de continuación única

**Lema 40.1.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un entorno de un punto  $a$ , con  $f(a) = 0$ . Entonces ó bien  $f(z) \equiv 0$  en un entorno de  $a$ , ó bien existe un entorno de  $a$  en el que  $a$  es el único cero de  $f$ .*

*Demostración.* Si todos los coeficientes de Taylor de  $f$  en el punto  $a$  son nulos,  $f$  es idénticamente nula en un entorno de  $a$ . En caso contrario, según lo anterior, podemos escribir  $f(z) = (z - a)^m h(z)$ , donde  $m = \text{ord}_a f$ ,  $h$  es holomorfa en  $\Omega$  y  $h(a) \neq 0$ . Como  $h$  es continua en  $a$ ,  $h(z) \neq 0$  en un entorno de  $a$ . Entonces  $f(z) \neq 0$  en este mismo entorno (salvo en el punto  $a$ ).  $\square$

**Lema 40.2.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\Omega$  y sea  $a$  un punto de  $\Omega$ . Si  $f(z) \equiv 0$  en un entorno de  $a$ , entonces  $f(z) \equiv 0$  en todo el dominio  $\Omega$ .*

*Demostración.* Sea  $b$  un punto de  $\Omega$ , y sea  $\gamma : [0, T] \rightarrow \Omega$  una curva continua que está contenida en  $\Omega$  y conecta  $a$  y  $b$ . Suponemos que  $\gamma(t) \neq \gamma(s)$  si  $t \neq s$ . Ponemos

$$T_* = \sup \{ \tau \in [0, T] : f(\gamma(t)) = 0 \text{ en } [0, \tau] \}.$$

Como  $f(\gamma(t))$  es continua y  $f = 0$  en un entorno de  $a$ ,  $T_* > 0$ . Usando otra vez la continuidad, vemos que  $f(\gamma(T_*)) = 0$ . Cogiendo cualquier sucesión de números  $t_n \in [0, T_*]$ ,  $t_n \neq T_*$ , que tienden a  $T_*$ , vemos que  $\gamma(t_n) \neq \gamma(T_*)$ ,  $f(\gamma(t_n)) = 0$  para todo  $n$ . Según el lema 40.1,  $f \equiv 0$  en un entorno de  $\gamma(T_*)$ .

Si tuviéramos  $T_* < T$ , entonces, según la definición de  $T_*$ , existiría una sucesión de números  $s_n \in [T_*, T]$  tales que  $s_n \rightarrow T_*$  y  $f(\gamma(s_n)) \neq 0$ . Esto contradice a que  $f \equiv 0$  en un entorno de  $\gamma(T_*)$ . Por lo tanto, en realidad,  $T_* = T$ , y por lo tanto,  $f(b) = f(\gamma(T)) = 0$ .  $\square$

**Teorema 40.3.** *Sea  $f$  una función holomorfa en un dominio  $\Omega$ ,  $z_n \in \Omega$ ,  $a \in \Omega$ ,  $z_n \rightarrow a$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ,  $z_n \neq a$ . Si  $f(z_n) = 0$  para todo  $n$ , entonces  $f(z) \equiv 0$  en  $\Omega$ .*



*Demostración.* El teorema se sigue de los lemas 40.1 y 40.2. □

Podemos observar que en este teorema no podemos prescindir de la hipótesis que  $\Omega$  es arcoconexo.

**Corolario 1.** *Si  $f$  es holomorfa en  $\Omega$ ,  $f|_E = 0$ , donde  $E$  está contenido en  $\Omega$  y tiene un punto de acumulación en  $\Omega$ , entonces  $f \equiv 0$  en  $\Omega$ .*

De hecho, se puede demostrar que para cualquier dominio  $\Omega$  en el plano complejo y para cualquier subconjunto  $E$  de  $\Omega$  que no tiene puntos de acumulación contenidos en  $\Omega$ , existe una función holomorfa  $f$  cuyo conjunto de ceros es exactamente el conjunto  $E$ . Se puede incluso asignar las multiplicidades de ceros de  $f$  en los puntos de  $E$  de forma arbitraria.

**Corolario 2.**  *$f$  holomorfa en  $G$ ,  $a \in G$ ,  $f^{(n)}(a) = 0$  para todo  $n \geq 0 \Rightarrow f \equiv 0$  en  $G$ .*

**Corolario 3** (Continuación única de funciones holomorfas). *Si  $f, g$  son holomorfas en  $\Omega$ ,  $f|_E = g|_E$ , donde  $E$  se contiene en  $\Omega$  y tiene un punto de acumulación en  $\Omega$ , entonces  $f \equiv g$ .*

## 41. Funciones meromorfas en un dominio

**Definición.** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{C}$ . Una función  $h$  se llama *meromorfa* en  $\Omega$  si  $h$  es holomorfa sobre un conjunto  $\Omega \setminus E$ , donde  $E \subset \Omega$  y todo punto de  $E$  es una singularidad aislada de  $f$  tipo polo (o evitable).

Es fácil ver que en este caso, el conjunto  $E$  de puntos singulares de  $f$  es finito o numerable.

**Lema 41.1.** *Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{C}$  y  $f, g$  dos funciones holomorfas en  $\Omega$ , con  $g \not\equiv 0$ . Entonces el cociente  $\frac{f}{g}$  es una función meromorfa.*

*Demostración.* Ver el lema 40.2 y Teoremas 36.2, 36.1. □

**Ejemplos.** Las funciones  $\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\operatorname{cos} z}$ ,  $\cotan z = \frac{\operatorname{cos} z}{\operatorname{sen} z}$ ,  $\frac{\operatorname{cos}(z^2)}{\operatorname{sen}(z^2+z)}$ , etc., son meromorfas en todo el plano complejo. La función  $\tan(\log(z))$  es meromorfa, por ejemplo, en la región  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , si entendemos por el logaritmo su rama principal. La función  $\operatorname{sen} \frac{1}{z}$  no es meromorfa en  $\mathbb{C}$ , porque  $z = 0$  es una singularidad esencial de esta función.

El teorema de Weierstrass afirma que para cualquier función meromorfa  $f$  en  $\Omega$  existen funciones  $g, h$  holomorfas en  $\Omega$  tales que  $f = \frac{g}{h}$ . Ver, por ejemplo, [21, Capítulo 10] o [3, Capítulo 6].

**Ejercicios.** (1) Demostrar que la suma y el producto de dos funciones meromorfas en un dominio  $G$  es meromorfa:

(2) Demostrar que si  $h_1$  y  $h_2$  son meromorfas en  $G$  y  $h_2 \neq 0$ , entonces  $h_1/h_2$  es también meromorfa en  $G$ .

(3) Comprobar que las funciones meromorfas en un dominio forman un cuerpo.

## 42. Teorema de Liouville. Teorema fundamental del Álgebra

**Definición.** Una función se llama *entera* si es holomorfa en todo el plano complejo.

**Teorema 42.1** (Liouville (1809–1882)). *Cualquier función  $f$ , que es entera y acotada es una constante.*

*Demostración.* Supongamos que  $|f| \leq C$ . Escribimos el desarrollo de Taylor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

de la función  $f$  en el origen y aplicamos las estimaciones de Cauchy (33.6) de los coeficientes del desarrollo:

$$|c_n| \leq \frac{\max_{|z|=\rho} |f(z)|}{\rho^n} \leq \frac{C}{\rho^n}.$$

Si  $n > 0$ ,  $\frac{C}{\rho^n} \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow \infty$ . Como  $|c_n|$  no depende del radio  $\rho$ , concluimos que  $c_n = 0$  para todo índice  $n > 0$ . Por tanto,  $f(z) \equiv c_0 = \text{const}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .  $\square$

**Teorema 42.2** (Teorema Fundamental del Álgebra). *Cualquier polinomio  $P(z)$  con coeficientes complejos de grado no nulo tiene al menos una raíz compleja.*

*Demostración.* Supongamos que  $P(z)$  no tiene raíces complejas. Entonces  $1/P$  es una función entera. Es fácil ver que  $P(z) \rightarrow \infty$  cuando  $z \rightarrow \infty$ . Por tanto,  $1/P(z) \rightarrow 0$  cuando  $z \rightarrow \infty$ ; en particular,  $1/P$  es una función entera acotada. Por el teorema de Liouville,  $1/P$  es una constante, con lo cual,  $P$  también es una constante. Por consiguiente, todos los coeficientes de  $P$ , salvo el término libre, son nulos, es decir, el grado de  $P$  es igual a 0, lo que estaba excluido en la hipótesis del teorema. Esta contradicción nos demuestra que en realidad  $P$  tiene al menos una raíz compleja.  $\square$

En el Álgebra se demuestra que si  $P(a) = 0$ , entonces el polinomio  $P(z)$  se divide por  $z - a$ . Tomando esto en cuenta, es fácil deducir del último teorema que *todo polinomio de grado  $n$  tiene exactamente  $n$  raíces complejas, contadas con sus multiplicidades*. En particular, por ejemplo, toda matriz  $n \times n$  con elementos complejos tiene exactamente  $n$  autovalores complejos. Estos hechos son una de las razones de la utilidad muy grande de los números complejos en diversos áreas de la matemática.

### 43. Propiedades locales de las funciones holomorfas. Principio del módulo máximo

**Teorema 43.1.** *Sea  $f$  una función holomorfa no constante en un dominio  $\Omega$ . Sea  $a$  un punto de  $\Omega$ . Entonces existe un número natural  $m$ , un entorno  $V$  de  $a$  y una función  $g$ , definida en  $V$ , tales que  $g(a) = 0$ ,  $g'(a) \neq 0$  y se tiene la representación*

$$f(z) = f(a) + g(z)^m, \quad z \in V. \quad (43.1)$$

*Demostración.* Tenemos el desarrollo de Taylor

$$f(z) = c_0 + c_1(z - a) + c_2(z - a)^2 + \cdots + c_n(z - a)^n + \cdots$$

en un disco centrado en  $a$ . Como  $f$  no es constante, existe un coeficiente  $c_m$  no nulo con  $m > 0$ . Suponiendo que  $c_m \neq 0$  y  $c_1 = \cdots = c_{m-1} = 0$ , obtenemos la representación

$$f(z) = c_0 + (z - a)^m c_m \cdot \left[ 1 + \frac{c_{m+1}}{c_m}(z - a) + \cdots \right] \stackrel{\text{def}}{=} c_0 + (z - a)^m c_m h(z)$$

(entonces  $m = \text{ord}_{z=a}(f(z) - c_0)$ ). Está claro que la serie para la función  $h$  converge en el mismo disco donde converge la serie para  $f$ . Tomemos cualquier valor  $\alpha$  de  $\sqrt[m]{c_m}$  y pongamos

$$g(z) = \alpha \sqrt[m]{h(z)}$$

(utilizamos la rama principal de la raíz  $m$ -ésima). Como  $h(a) = 1$ , y la rama principal de la raíz  $m$ -ésima es holomorfa en un entorno de 1,  $g$  es holomorfa en un entorno de  $a$ .

Teniendo en cuenta que  $c_0 = f(a)$ , obtenemos (43.1). □

El número  $m$  que figura en el teorema se determina de forma única. De hecho,  $m - 1 = \text{ord}_a f'$ . Si  $f'(a) \neq 0$ , entonces  $m = 1$ .

**Corolario.** *Supongamos que  $f$  es holomorfa en un entorno de  $a$ ,  $f \neq \text{const}$ ,  $f(a) = b$ , y sea  $m = 1 + \text{ord}_a f'$ . Entonces existe un disco  $B(b, \varepsilon)$  centrado en  $b$  y un entorno  $V$  de  $a$  tal que la ecuación*

$$f(z) = w, \quad z \in V$$

*tiene exactamente  $m$  raíces si  $w \in B(b, \varepsilon)$ ,  $w \neq b$  y tiene exactamente una raíz  $z = a$  (de multiplicidad  $m$ ) si  $w = b$ .*

Para demostrarlo, basta escribir la representación (43.1) de  $f$  y aplicar el Teorema 7.7 de la función inversa en su versión local a la función  $g$  en un entorno de  $a$ .  $\square$

Este corolario implica también que si  $f$  es holomorfa en un entorno de  $a$  y  $f'(a) = 0$ , entonces  $f$  no es inyectiva en ningún entorno de  $a$ .

**Teorema 43.2.** *Sea  $f$  una función holomorfa no constante en un dominio  $\Omega$ . Entonces el conjunto  $f(\Omega)$  es también un dominio.*

*Demostración.* La imagen de una curva continua por  $f$  es una curva continua, por tanto,  $f(\Omega)$  es arcoconexo.

Falta demostrar que  $f(\Omega)$  es un abierto. Para cualquier  $b$  en la imagen  $f(\Omega)$ , existe un punto  $a$  en  $\Omega$  tal que  $b = f(a)$ . Por el anterior corolario, la imagen  $f(\Omega)$  contiene un entorno de  $b$ , a saber,  $B(b, \varepsilon)$ , en la notación del corolario. Por tanto,  $f(\Omega)$  es abierto.  $\square$

**Teorema 43.3** (Principio del módulo máximo). *Sea  $f$  una función holomorfa no constante en un dominio  $\Omega$ . Entonces  $|f|$  no puede alcanzar el máximo en ningún punto dentro de  $\Omega$ .*

*Demostración.* Sea  $a$  un punto de  $\Omega$ . Entonces, según el teorema anterior,  $f(a)$  es un punto interior de  $f(\Omega)$ , con lo cual  $f(\Omega)$  tiene puntos más alejados del origen que  $f(a)$ . Por lo tanto, existe un punto  $a_1 \in \Omega$  tal que  $|f(a_1)| > |f(a)|$ , y  $|f|$  no puede alcanzar el máximo en  $a$ .  $\square$

**Corolario.** *Sean  $\Omega$  un dominio acotado y  $f$  una función que es holomorfa en  $\Omega$  y continua en la clausura de  $\Omega$ . Entonces el máximo de  $|f|$  sobre  $\text{clos } \Omega$  se alcanza en algún punto de la frontera  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .*

*Demostración.* Como  $\text{clos } \Omega$  es cerrado y acotado, es un compacto en  $\mathbb{C}$ , y  $|f|$  alcanza su máximo en algún punto de  $\text{clos } \Omega$ .

Si  $f \equiv \text{const}$  en  $\Omega$ , entonces  $f$  es igual a la misma constante en la frontera, y la afirmación es obvia. Si  $f$  no es constante, entonces según el principio del máximo,  $|f|$  sólo puede alcanzar su máximo en la frontera de  $\Omega$ .  $\square$

Recordamos que el Teorema 7.8, que es la versión global del teorema de la función inversa, no se ha demostrado todavía. Ahora lo podemos hacer sin dificultad.

*Demostración del Teorema 7.8.* El Teorema 43.1 y su corolario implican la afirmación 1). La afirmación 2) se estableció en el Teorema 43.2. La última afirmación del Teorema sigue del Teorema 7.7.  $\square$

## 44. Lema de Schwartz

**Lema 44.1** (Lema de Schwartz). *Sea  $\mathbb{D}$  el disco unidad, y sea  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  una función holomorfa tal que  $|f(z)| \leq 1$  en  $\mathbb{D}$ . Si  $f(0) = 0$ , entonces  $|f(z)| \leq |z|$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , y  $|f'(0)| \leq 1$ .*

*Demostración.* La función

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & \text{si } z \in \mathbb{D}, z \neq 0, \\ f'(0), & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

es holomorfa en  $\mathbb{D}$  (0 es una singularidad evitable de  $g|\mathbb{D} \setminus \{0\}$ ). Según el Principio del módulo máximo, dado un radio  $r \in (0, 1)$ , se tiene

$$|g(z)| \leq \max_{|w|=r} |g(w)| = \max_{|w|=r} \frac{|f(w)|}{r} \leq \frac{1}{r}, \quad |z| < r.$$

Pasando ahora al límite cuando  $r \rightarrow 1-$ , obtenemos que  $|g(z)| \leq 1$ ,  $|z| \leq 1$ . Esto demuestra las dos afirmaciones del lema.  $\square$

**Ejercicio.** Si se tiene adicionalmente que ó bien  $|f'(0)| = 1$ , ó bien  $|f(z_0)| = |z_0|$  para algún  $z_0 \in \mathbb{D}$ ,  $z_0 \neq 0$ , entonces  $f(z) = cz$  para todo  $z \in \mathbb{D}$ , donde  $c$  es una constante de módulo uno.

## 45. Principio del argumento. Teorema de Rouché

Haremos primero algunos comentarios preliminares:

1) Supongamos que  $\gamma$  es una curva en el plano complejo que empieza en  $\alpha$ , termina en  $\beta$  y no pasa por el origen. Entonces

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \log |z| \Big|_{z=\alpha}^{z=\beta} + 2\pi i \operatorname{rot}_{\gamma}(0),$$

donde  $\text{rotac}_\gamma(0)$  es el número de vueltas de la curva  $\gamma$  alrededor del origen, que fue introducido en la Sección 16. (Esta fórmula es trivial si  $\gamma$  es una curva pequeña. El caso general se obtiene por aditividad).

2) Supongamos ahora que  $\gamma, \delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  son dos curvas en el plano complejo que no pasan por el origen. Definimos la curva “producto”

$$\gamma \cdot \delta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C},$$

poniendo

$$(\gamma \cdot \delta)(t) = \gamma(t) \cdot \delta(t).$$

Evidentemente, esta curva tampoco pasa por el origen. Entonces se tiene la fórmula

$$\text{rotac}_{\gamma \cdot \delta}(0) = \text{rotac}_\gamma(0) + \text{rotac}_\delta(0).$$

Efectivamente, para todo  $\tau \in [a, b]$ , tenemos

$$\begin{aligned} 2\pi \text{rotac}_{\gamma \cdot \delta|_{[a, \tau]}}(0) &= \arg(\gamma(\tau)\delta(\tau)) - \arg(\gamma(a)\delta(a)) \\ &= 2\pi \text{rotac}_{\gamma|_{[a, \tau]}}(0) + 2\pi \text{rotac}_{\delta|_{[a, \tau]}}(0) \pmod{2\pi}, \end{aligned}$$

por tanto, la función

$$\varphi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \text{rotac}_{\gamma \cdot \delta|_{[a, \tau]}}(0) - \text{rotac}_{\gamma|_{[a, \tau]}}(0) - \text{rotac}_{\delta|_{[a, \tau]}}(0)$$

es continua y toma valores, que son números enteros. Como  $\varphi(a) = 0$ , concluimos que  $\varphi(b) = 0$ .  $\square$

**Teorema 45.1** (Principio del argumento). *Supongamos que  $\Omega$  un dominio en el plano complejo y  $K$  es un compacto de Jordan contenido en  $\Omega$ , cuya frontera orientada es una curva de Jordan  $\gamma$  (con frontera diferenciable a trozos). Sea  $f$  una función meromorfa en  $\Omega$ , que no tiene ni ceros ni polos en la curva  $\gamma$ . Definimos los números*

$$\begin{aligned} N &= \text{el número de ceros de } f \text{ en } K, \\ M &= \text{el número de polos de } f \text{ en } K. \end{aligned}$$

Entonces

$$N - M = \text{rotac}_{f \circ \gamma}(0). \tag{45.1}$$

En este teorema tenemos que contar ceros y polos de  $f$ , tomando en cuenta su multiplicidad. Por ejemplo, si cogemos  $f(z) = z^n$ ,  $n > 0$ , entonces  $f$  es holomorfa y por tanto meromorfa en todo el plano complejo  $\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \Omega$ . Ponemos  $K = \{z : |z| \leq 1\}$ , el disco unidad cerrado; su frontera es la circunferencia unidad con la orientación positiva:  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Entonces  $f \circ \gamma(t) =$

$e^{nit}$  da  $n$  vueltas alrededor del origen, es decir,  $\text{rotac}_{f \circ \gamma}(0) = n$ . Vemos que  $M = 0$  (no hay polos en  $K$ ) y  $N = n$  (el cero  $z = 0$  de  $f(z)$  tiene la multiplicidad  $n$ ), con lo cual ambas partes de (45.1) son iguales a  $n$ .

De igual forma, si  $n < 0$ , entonces  $M = |n| = -n$  y  $N = 0$ .

*Demostración del Teorema 45.1.* Sea  $a$  un cero o un polo de  $f$  en  $K$ , con  $\text{ord}_a f = n$ . Podemos escribir

$$f(z) = (z - a)^n h(z),$$

donde  $h$  es holomorfa en un entorno de  $a$ ,  $h(a) \neq 0$ . Luego

$$\begin{aligned} f'(z) &= n(z - a)^{n-1} h(z) + (z - a)^n h'(z), \\ \frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{n}{z - a} + \frac{h'(z)}{h(z)}. \end{aligned}$$

Calculando el residuo en  $a$ , obtenemos

$$\text{Res}_a \frac{f'}{f} = \text{Res}_{z=a} \frac{n}{z - a} + \text{Res}_a \frac{h'}{h} = n = \text{ord}_a f$$

(el residuo de  $\frac{h'}{h}$  en  $a$  es igual a 0, porque esta función es holomorfa en un entorno de  $a$ ). Por lo tanto, por el teorema de los residuos y la fórmula (28.4),

$$\begin{aligned} 2\pi i \text{rotac}_{f \circ \gamma}(0) &= \int_{f \circ \gamma} \frac{dw}{w} = \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \\ &= 2\pi i \sum_{a \in \text{int } K} \text{Res}_a \frac{f'}{f} = 2\pi i(N - M). \quad \square \end{aligned}$$

Hemos visto durante la prueba que

$$N - M = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

Si  $K$  es un compacto de Jordan más general, cuya frontera positiva se representa como  $\partial K = \gamma_1 + \cdots + \gamma_s$ , entonces se tiene la fórmula

$$N - M = \text{rotac}_{f \circ \gamma_1}(0) + \cdots + \text{rotac}_{f \circ \gamma_s}(0). \quad (45.2)$$

La demostración es la misma.

**Ejercicio.** Demostrar la siguiente **variante de la fórmula de Cauchy**: Sea  $G$  un dominio simplemente conexo y  $f$  una función holomorfa en  $G$ . Sea  $\gamma$  una curva cerrada en  $G$ . Entonces, para todo  $\lambda \notin \gamma$ ,

$$f(\lambda) \cdot \text{rotac}_\gamma(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - \lambda} dz.$$

**Indicación:** Considerar la función  $g(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(z) - f(\lambda)}{z - \lambda}$ . Demostrar que  $\lambda$  es una singularidad evitable de esta función y que  $\int_\gamma g(z) dz = 0$ .

**Teorema 45.2 (Rouché).** Sea  $\Omega$  un dominio en  $\mathbb{C}$ ,  $K \subset \Omega$  un compacto de Jordan y  $f, g$  dos funciones holomorfas en  $\Omega$ . Supongamos que  $|f(z)| > |g(z)|$  para todo punto  $z$  **en la frontera** de  $K$ . Entonces las funciones  $f$  y  $f + g$  tienen el mismo número de ceros en  $K$ .

Está claro que las hipótesis del teorema implican que  $f \neq 0$ ,  $f + g \neq 0$  sobre la frontera de  $K$ . Por lo tanto, la cantidad de ceros de  $f$  sobre  $K$  es igual a la cantidad de ceros de  $f$  en el interior de  $K$ ; se puede decir lo mismo respecto de la función  $f + g$ . Es esencial la desigualdad *estricta*  $|f(z)| > |g(z)|$ ,  $z \in \partial K$  en la hipótesis del teorema.

*Demostración del Teorema de Rouché.* Denotamos por  $N_f$  y  $N_{f+g}$  los números de ceros de  $f$  y de  $f + g$  en  $K$ , respectivamente. Tenemos que demostrar que  $N_f = N_{f+g}$ .

Supongamos primero que la frontera de  $K$  consiste de una sólo curva de Jordan  $\gamma$ . Entonces podemos escribir

$$f + g = f \cdot h, \quad h \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{g}{f};$$

$$\text{rotac}_{f \circ \gamma + g \circ \gamma}(0) = \text{rotac}_{f \circ \gamma}(0) + \text{rotac}_{h \circ \gamma}(0).$$

Como  $|\frac{g}{f}| < 1$  sobre  $\gamma$ , vemos que  $|h(z) - 1| < 1$ ,  $z \in \gamma$ , y por lo tanto,  $\text{rotac}_{h \circ \gamma}(0) = 0$ . Luego por el principio de argumento,

$$N_f = \text{rotac}_{f \circ \gamma}(0) = \text{rotac}_{f \circ \gamma + g \circ \gamma}(0) = N_{f+g},$$

lo que demuestra el teorema para este caso. En el caso general, cuando  $\partial K = \gamma_1 + \dots + \gamma_s$ , aplicamos el mismo razonamiento a cada una de las curvas  $\gamma_j$  por separado y luego utilizamos la fórmula (45.2).  $\square$

El teorema de Rouché es muy útil para precisar la posición de raíces de funciones holomorfas.



**Ejemplo.** Consideremos el polinomio  $P(z) = z^4 - 12z + 10$ ; se pide calcular cuántas raíces tiene en el anillo  $1 < |z| < 3$ . Este polinomio es holomorfo en todo el plano complejo, que será nuestro dominio  $\Omega$ .

Para resolver este problema es útil calcular primero el número de ceros de  $P$  en los discos  $|z| < 1$  y  $|z| < 3$ . Empleamos el teorema de Rouché de dos formas diferentes.

Poniendo  $K = \{z : |z| \leq 1\}$ , vemos que

$$P(z) = (-12z) + (z^4 + 10) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) + g(z),$$

además,  $|f(z)| = |-12z| = 12$  en la circunferencia  $|z| = 1$ , mientras que  $|g(z)| = |z^4 + 10| \leq 11$  en esta circunferencia, con lo cual  $|f| > |g|$  en  $\partial K$ . Por el teorema de Rouché,  $P(z) = f(z) + g(z)$  tiene el mismo número de raíces en  $\{z : |z| \leq 1\}$  que la función  $f$  en este disco, es decir, **una** raíz.

Ponemos ahora  $K = \{z : |z| \leq 3\}$  y utilizamos otra representación  $P = f + g$  con las características deseadas:

$$P(z) = (z^4) + (-12z + 10) \stackrel{\text{def}}{=} f(z) + g(z).$$

Ahora tenemos:  $|f(z)| = |z^4| = 81$  en la circunferencia  $|z| = 3$ , mientras que  $|g(z)| = |-12z + 10| \leq 46$  en esta circunferencia. Por lo tanto  $|f(z)| > |g(z)|$  en la circunferencia  $|z| = 3$  (esto no se cumple si descomponemos  $P$  en la suma  $f + g$  como antes). Por el teorema de Rouché,  $P(z) = f(z) + g(z)$  tiene el mismo número de raíces en  $\{z : |z| \leq 3\}$  que la función  $f(z) = z^4$  en este disco, es decir, **cuatro** raíces. Según lo anterior,  $P$  no puede tener raíces en ninguna de las circunferencias  $|z| = 1$ ,  $|z| = 3$ . Finalmente obtenemos que  $P(z)$  tiene  $4 - 1 = \mathbf{3}$  raíces en el anillo  $1 < |z| < 3$ .

## Referencias

- [1] L. V. Ahlfors, Complex analysis. An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable. McGraw-Hill, 1979 (Third edition).
- [2] J. Bak, D. J. Newman, Complex analysis, Springer, 1982.
- [3] C. A. Berenestein, R. Gay, Complex variables. An introduction, Springer, 1991.
- [4] J. W. Brown, R. V. Churchill, Variable compleja y aplicaciones, séptima edición, McGraw - Hill Interiberoamericana de España, 2004.
- [5] R. P. Boas, Invitation to complex analysis, Random House, 1987.
- [6] B. Choudhary, The elements of complex analysis. Second edition. Wiley Eastern Ltd., 1992.
- [7] J. Conway, Functions of one complex variable, 2 vols. Springer, 1983.
- [8] W. Derrick, Complex Analysis and Applications, Brooks/Cole, 1972.
- [9] J. W. Dettman, Applied complex variables. Second edition. Dover Publications, Inc., 1984.
- [10] J. D. Dixon, A brief proof of Cauchy's integral theorem. Proc. Amer. Math. Soc. 29 1971 625–626.
- [11] P. Henrici, Applied and computational complex analysis. Vol. 1. Second edition. John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [12] E. Hille, Analytic function theory, vols. I, II, Chelsea Publ. Co., Second edition, 1977.
- [13] N. Levinson, R. M. Redheffer, Curso de variable compleja, Ed. Reverté, 1975.
- [14] S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton Univ. Press, 1949.
- [15] C. Kosniowski, A first course in algebraic topology, Cambridge Univ. Press, 1980.
- [16] Y. K. Kwok, Applied complex variables for scientists and engineers. Cambridge University Press, 2002.

- [17] A. Markushevich, Teoría de las funciones analíticas, 2 vols., Mir, Moscu, 1987.
- [18] J. E. Marsden y A. J. Tromba, Cálculo vectorial, Addison-Wesley, 1991.
- [19] T. H. Moore, E. Hadlock, Complex Analysis, Word Scientific, 1991.
- [20] D. Pestana Galván, J. M. Rodríguez García, F. Marcellán Español, Variable compleja. Un curso práctico. Síntesis, Madrid, 1999.
- [21] M. Rao, H. Stetkær, Complex analysis: an invitation. A concise introduction to complex function theory. Word Scientific Co., 1991.
- [22] R. Remmert, Theory of complex functions, Springer, 1991.
- [23] W. Rudin, Análisis Real y Complejo, MacGraw-Hill, New York, 1986
- [24] Volkovysky, L. y otros, Problemas sobre la teoría de funciones de variable compleja, Mir, 1977.
- [25] <http://www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/map.html>
- [26] [http://www.diam.unige.it/~irro/conformi\\_e.html](http://www.diam.unige.it/~irro/conformi_e.html)

# Apéndice 1

## La demostración del Teorema de Jordan para curvas diferenciables a trozos. Comentarios sobre la fórmula de Green

Nuestro primer objetivo es demostrar el Teorema de Jordan 17.2 para el caso de una curva de Jordan  $\gamma$  diferenciable a trozos (ver la definición en la Sección 27). Supongamos que  $\gamma$  es una curva de este tipo en el plano euclideo  $\mathbb{E}^2$ . Tendremos que usar distintos sistemas de coordenadas rectangulares en el plano. Utilizaremos letras  $p, q$  para denotar puntos del plano y letras  $x, y$  para denotar sus coordenadas en un sistema de coordenadas determinado.

Existe una representación  $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_k$ , donde las curvas  $\gamma_j$  son diferenciables. Nos vamos a referir a los extremos de las curvas  $\gamma_j, j = 1, \dots, k$  como a *los vértices de  $\gamma$* .

Necesitamos primero una afirmación sobre subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  de la forma

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : a < x < b, f_1(x) < y < f_2(x)\}. \quad (1.1)$$

**Lema A.1.** *Supongamos que las funciones  $f_1, f_2$  son continuas en el intervalo  $(a, b)$  y  $f_1 < f_2$  en este intervalo. Entonces el conjunto (1.1) es abierto y arcoconexo.*

*Demostración.* Es obvio que  $\Omega$  es abierto. Sean  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  dos puntos de  $\Omega$ ; tenemos que encontrar una curva continua dentro de  $\Omega$  que los conecte. Basta considerar el caso  $x_1 < x_2$ . Entonces cualquier gráfica  $y = g(x), x \in [x_1, x_2]$  de una función continua  $g$  que satisfice  $f_1(x) < g(x) < f_2(x)$ , hace la tarea. Las funciones  $g$  con esta propiedad existen; de hecho, se puede poner  $g = (1 - \alpha)f_1 + \alpha f_2$ , donde  $\alpha(x)$  es cualquier función continua en  $[x_1, x_2]$  que satisfice  $0 < \alpha < 1, ((1 - \alpha)f_1 + \alpha f_2)(x_1) = y_1, ((1 - \alpha)f_1 + \alpha f_2)(x_2) = y_2$ . Se puede encontrar una función lineal  $\alpha$  con las propiedades deseadas.  $\square$

Sea  $p_0$  un punto de la curva de Jordan  $\gamma$ . Supongamos que  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{E}^2$  y que  $p_0 = \gamma(t_0)$ . Podemos suponer que  $\alpha < t_0 < \beta$ . Para todo  $\varepsilon$  positivo,  $\gamma([\alpha, \beta] \setminus (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon))$  es un compacto en el plano, que no contiene a  $p_0$  y por tanto, está a una distancia positiva de  $p_0$ . Se deduce que  $p_0$  tiene coordenadas  $(x_0, y_0)$  respecto de un sistema adecuado de coordenadas rectangulares y existe su *entorno rectangular*

$$R(p_0) = \{(x, y) : a < x < b, c < y < d\}$$

tal que  $p_0 \in R(p_0)$  y  $R(p_0) \cap \gamma$  tiene una de las dos siguientes formas:

(1) Es una gráfica de una función  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable a trozos tal que  $c < f(x) < d$  para todo  $x \in (a, b)$ ;

(2) Es la unión de gráficas de dos funciones  $f_1, f_2 : [x_0, b) \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables a trozos tales que  $c < f_1(x) < f_2(x) < d$  para todo  $x \in [x_0, b)$  y  $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ .

**Lema A.2.** En cada uno de estos dos casos, el complemento de  $\gamma$  en el rectángulo  $R(p_0)$  tiene exactamente dos componentes arcoconexas.

*Demostración.* En el caso (1), los dos componentes son

$$R^-(p_0) = \{a < x < b, c < y < f(x)\},$$

$$R^+(p_0) = \{a < x < b, f(x) < y < d\}.$$

Está claro que  $R(p_0)$  se descompone en una unión disjunta de  $R^-(p_0)$  y  $R^+(p_0)$ . Los dos conjuntos son dominios, por el lema A.1.

En el caso (2), afirmamos que los dos componentes son

$$R_{int}(p_0) = \{x_0 < x < b, f_1(x) < y < f_2(x)\},$$

$$R_{ext}(p_0) = \{x_0 < x < b, y < f_1(x) \text{ ó } y > f_2(x)\}$$

$$\cup \{a < x \leq x_0, c < y < d, (x, y) \neq p_0\}$$

(ver Fig. 2). El conjunto  $R_{int}(p_0)$  es un dominio, gracias al lema A.1. Para

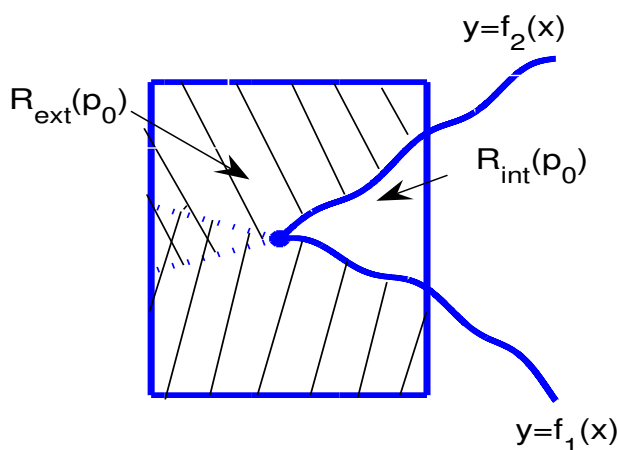


Figura 2

demostrar que  $R_{ext}(p_0)$  es un dominio, lo representamos como una unión no

disjunta de dos dominios (ver la figura 2, donde estos dos conjuntos están sombreados). Son dominios en virtud del lema A.1. Se deduce que  $R_{ext}(p_0)$  es también un dominio.  $\square$

Es fácil ver también lo siguiente. Sea  $p_0 \in \gamma$ , y sea  $R(p_0)$  un rectángulo que satisface las conclusiones del Lema A.2. Sean  $\mathcal{R}_1$  y  $\mathcal{R}_2$  las dos componentes arcoconexas de  $R(p_0) \setminus \gamma$ . Sea  $q \neq p_0$  un punto de  $\gamma \cap R(p_0)$ . Entonces todo entorno de  $q$  contiene tanto puntos de  $\mathcal{R}_1$  como puntos de  $\mathcal{R}_2$ .

**Lema A.3.** *El conjunto  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  tiene a lo sumo dos componentes conexas.*

*Demostración.* Para cualquier punto  $p \in \gamma$ , existe un rectángulo abierto  $R(p)$ , centrado en  $p$ , tal que en un correspondiente sistema de coordenadas  $R(p) \cap \gamma$  tiene una de las representaciones (1) o (2). Como  $\gamma$  es un compacto, podemos encontrar un recubrimiento de  $\gamma$  por un número finito de rectángulos  $R(q_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , tales que para cada índice  $j$ ,  $R(q_j) \setminus \gamma$  tiene una de las formas (1) o (2). Podemos encontrar un subconjunto  $\{p_1, \dots, p_m\}$  del conjunto finito  $\{q_1, \dots, q_n\}$  (con posiblemente otra numeración) tal que para todo  $j = 1, \dots, m-1$ , la intersección  $R(p_j) \cap R(p_{j+1}) \cap \gamma$  no es vacía. Los puntos  $p_1, \dots, p_m$  se definen por inducción. Ponemos  $p_1 = q_1$ . Podemos suponer que  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  y extender esta función a una función  $(\beta - \alpha)$ -periódica  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Si  $p_1, \dots, p_j$  ya están definidos,  $\gamma(t_j) \in R(p_j)$  y  $t'_j$  es el mínimo de los números reales  $t$  tales que  $t > t_j$  y  $\gamma(t) \notin R(p_j)$ , entonces  $\gamma(t'_j) \in R(q_k)$  para algún índice  $k \neq j$ . Si  $q_k \neq p_1$ , ponemos  $p_{j+1} \stackrel{\text{def}}{=} q_k$ . Si  $q_k = p_1$ , ponemos  $m = j$  y terminamos el proceso; en este caso los rectángulos  $R(p_1), \dots, R(p_m)$  cubren toda nuestra curva  $\gamma$ .

Todo  $R(p_j) \setminus \gamma$  tiene exactamente dos componentes, que denotamos por  $R_{1,j}$  y  $R_{2,j}$ . Denotaremos por  $\mathcal{O}(R_{1,j})$ ,  $\mathcal{O}(R_{2,j})$  las componentes conexas de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$ , que contienen a  $R_{1,j}$  y  $R_{2,j}$ , respectivamente.

El comentario que precede el enunciado del lema implica que cada una de las componentes  $\mathcal{O}(R_{1,j})$ ,  $\mathcal{O}(R_{2,j})$ , tiene al menos un punto en común con una de las componentes  $\mathcal{O}(R_{1,j+1})$ ,  $\mathcal{O}(R_{2,j+1})$  y por lo tanto, coincide con uno de estos últimos dominios. Por consiguiente, entre todos los dominios  $\mathcal{O}(R_{1,j})$ ,  $\mathcal{O}(R_{2,j})$ ,  $j = 1, \dots, n$ , no hay más que dos distintos.

Por otro lado, es fácil ver que *cualquier componente conexa* de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  coincide con una de las componentes  $\mathcal{O}(R_{1,j})$  ó  $\mathcal{O}(R_{2,j})$  para algún  $j$ . Efectivamente, si escogemos un punto arbitrario  $p \in \mathbb{E}^2 \setminus \gamma$ , podemos conectarlo por un arco  $\alpha$  con un punto de  $\gamma$ , de tal forma que  $\alpha(0) = p$ ,  $\alpha(1) \in \gamma$ . Sea  $\alpha(t_0)$ ,  $0 < t_0 \leq 1$ , el primer punto de  $\alpha$  que se contiene en  $\gamma$  (tal punto existe, porque  $\gamma$  es cerrado). El punto  $\alpha(t_0)$  pertenece al rectángulo  $R(p_j)$  para un índice  $j$ . Entonces para los números  $s < t_0$  cercanos a  $t_0$ , ó bien  $\alpha(s) \in R_{1,j}$ ,

ó bien  $\alpha(s) \in R_{2,j}$ . En el primer caso,  $p = \alpha(0) \in \mathcal{O}(R_{1,j})$ , y en el segundo,  $p = \alpha(0) \in \mathcal{O}(R_{2,j})$ .  $\square$

**Lema A.4.** *El conjunto  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  tiene por lo menos dos componentes conexas  $\mathcal{O}_0$  y  $\mathcal{O}_1$ , tales que  $\text{rotac}_\gamma(z) = 0$  para todo  $z \in \mathcal{O}_0$ , y  $\text{rotac}_\gamma(z) = 1$  para todo  $z \in \mathcal{O}_1$  (ó bien  $\text{rotac}_\gamma(z) = -1$  para todo  $z \in \mathcal{O}_1$ ).*

*Demostración.* Cualquier punto  $z$  que está lejos de la curva  $\gamma$  satisface  $\text{rotac}_\gamma(z) = 0$ . Por lo tanto, existe una componente conexa  $\mathcal{O}_0$  de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  tal que  $\text{rotac}_\gamma(w) = 0$  para todo  $w \in \mathcal{O}_0$ . Conectando  $z$  con un punto de  $\gamma$  por un arco  $\alpha$ , como en el final de la demostración del lema anterior, vemos que existe un  $z_0 \in \gamma$  y un pequeño rectángulo  $R(z_0)$ , centrado en este punto, tales que  $R(z_0) \setminus \gamma$  tiene dos componentes conexas (que llamaremos  $R_0$  y  $R_1$ ), y  $\text{rotac}_\gamma(z) = 0$  para todo  $z \in R_0$ . Podemos suponer que  $z_0$  no es un vértice de  $\gamma$ . En un sistema adecuado de coordenadas rectangulares, un entorno de  $z_0$  en  $\gamma$  coincide con la gráfica  $y = f(x)$  de una función suave. Podemos suponer que  $R_0 = R(z_0) \cap \{y < f(x)\}$ .

La curva  $\gamma$  se interseca con la frontera de  $R(z_0)$  en exactamente dos puntos, que la dividen en dos curvas simples. Denotamos por  $\beta$  la curva superior (ver Fig. 3).

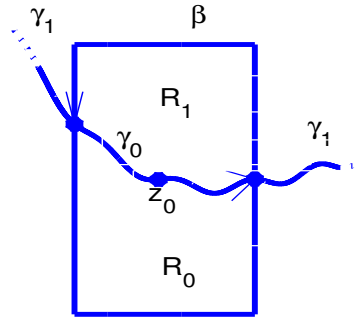


Figura 3

Denotamos por  $\gamma_1$  la parte de la curva  $\gamma$ , que está fuera de  $R(z_0)$ , y por  $\gamma_0$  la parte de  $\gamma$ , que está dentro del rectángulo  $R(z_0)$ , de tal forma que  $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$ . Podemos parametrizar  $\beta$  de tal forma que  $\gamma_0 + \beta$  sea una curva de Jordan. Entonces la orientación positiva de la frontera de  $R_1$  coincide con  $\pm(\gamma_0 + \beta)$ . La definición del número de vueltas implica que  $\text{rotac}_{\partial R_1}(w) = 1$  para todo  $w \in R_1$ . Para todo  $w \in R_0$ ,

$$\text{rotac}_{\gamma_1 - \beta}(w) = \text{rotac}_{\gamma_1 + \gamma_0}(w) - \text{rotac}_{\gamma_0 + \beta}(w) = \text{rotac}_{\gamma_1 + \gamma_0}(w) = 0.$$

Como la curva  $\gamma_1 - \beta$  no se interseca con el rectángulo (abierto)  $R(z_0)$ , deducimos que  $\text{rotac}_{\gamma_1 - \beta}(w) = 0$  para todo  $w \in R(z_0)$ . Por lo tanto, si  $w \in R_1$ , entonces

$$\text{rotac}_{\gamma_1 + \gamma_0}(w) = \text{rotac}_{\gamma_1 - \beta}(w) + \text{rotac}_{\gamma_0 + \beta}(w) = \pm \text{rotac}_{\partial R_1}(w) = \pm 1.$$

Escogiendo como  $\mathcal{O}_1$  la componente conexa de  $\mathbb{C} \setminus \gamma$  que contiene a  $R_1$ , vemos que se cumple la conclusión del lema.  $\square$

*Demostración del Teorema de Jordan 17.2.* Definimos los conjuntos  $\Omega_j$  por la fórmula (17.1). Los lemas A.3 y A.4 implican el apartado a) y la primera parte de b). La frontera de  $\Omega_0$  no se interseca con  $\Omega_0$ , porque  $\Omega_0$  es abierto. Además, se tiene que  $\partial\Omega_0 \cap \Omega_j = \emptyset$  también para  $j \neq 0$ , porque los abiertos  $\Omega_0$  y  $\Omega_j$  son disjuntos.

Esto implica que  $\partial\Omega_0 \subset \mathbb{C} \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_1 \cup \Omega_{-1})$ , es decir,  $\partial\Omega_0 \subset \gamma$ . Por otro lado, es fácil ver que si  $\Omega_j \neq \emptyset$  ( $j = 0$  ó  $j = \pm 1$ ), y  $z_0$  es cualquier punto de  $\gamma$ , entonces  $z_0 \in \partial\Omega_j$ . Efectivamente, podemos suponer que  $z_0 = p_1$ , donde  $p_1, \dots, p_m$  son los puntos que figuraban en la demostración del lema A.3. Entonces  $R(p_1) \setminus \gamma$  tiene dos componentes  $R_1, R_2$ , y  $\Omega_j$  contiene a una de ellas. Tanto  $R_1$  como  $R_2$  contiene una sucesión que tiende a  $z_0$ .

Por lo tanto,  $\partial\Omega_j = \gamma$  para cualquier componente  $\Omega_j$  no vacía.

Si  $\mathcal{D}$  es un disco que contiene a la curva  $\gamma$ , entonces según la definición,  $\text{rotac}_\gamma(z) = 0$  para cualquier  $z$  fuera de  $\mathcal{D}$ , lo que implica c).  $\square$

### **Comentarios sobre la demostración de la fórmula de Green (29.1).**

Los manuales de Cálculo no suelen incluir una demostración completa de esta fórmula. Es fácil demostrarla si el compacto  $K$  coincide con la clausura de uno de los dominios  $R^-(p_0), R^+(p_0), R_{int}(p_0), R_{ext}(p_0)$ , que fueron considerados en la demostración del lema A.2 y si se cumple además la siguiente condición: la función  $f$  (en el caso de dominios  $R^-(p_0), R^+(p_0)$ ) y las funciones  $f_1, f_2$  (en el caso de dominios  $R_{int}(p_0), R_{ext}(p_0)$ ) son monótonas. Este caso lo llamaremos “el caso especial”.

Sea  $K$  un compacto de Jordan y sean  $P, Q$  dos funciones de clase  $C^1$  en un entorno de  $K$ . Sea  $R$  un rectángulo abierto en el plano. Decimos que  $R$  está en una posición regular respecto de  $K$  si  $R \cap \text{int } K$  tiene exactamente dos componentes conexas, que tienen la forma de conjuntos  $R^-(p_0), R^+(p_0), R_{int}(p_0), R_{ext}(p_0)$  y se cumple la condición adicional que acabamos de formular.

Es obvio también que si la fórmula es cierta para unas formas  $P_1 dx + Q_1 dy, \dots, P_n dx + Q_n dy$ , entonces es cierta también para la suma de estas formas. Esta observación nos permite reducir el caso general de la fórmula



de Green al caso especial, utilizando el siguiente argumento. Sea

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 2x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 1 - 2(1-x)^2 & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

y sea  $\psi(x) = \varphi(x) - \varphi(x-1)$ . Entonces  $\varphi, \psi \in C^1(\mathbb{R})$ , y para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi(x-j) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{-n \leq j \leq n} (\varphi(x-j) - \varphi(x-j-1)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x+n) - \varphi(x-n-1) = 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Podemos cubrir el compacto de Jordan  $K$  por un número finito de rectángulos abiertos  $R_1, \dots, R_N$  (de distintas orientaciones) tales que para cada  $j$ , ó bien la clausura de  $R_j$  está en el interior de  $K$ , ó bien  $R_j$  está en posición regular respecto de  $K$ . Utilizando el lema de Lebesgue sobre recubrimientos, vemos que existe un número  $\delta$  tal que cualquier subconjunto de  $K$  de diámetro menor que  $\delta$  se contiene en uno de los rectángulos abiertos  $R_j$ .

Ponemos  $\eta_{jk}(x, y) = \psi(\frac{x}{2\delta} - j)\psi(\frac{y}{2\delta} - k)$ , donde  $j, k \in \mathbb{Z}$ . Entonces  $\eta_{jk} \in C^1(\mathbb{R}^2)$ . Según (1.2),

$$\sum_{j,k} \eta_{jk}(x, y) \equiv 1$$

para todo punto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Ponemos

$$P_{jk}(x, y) = \eta_{jk}(x, y)P(x, y), \quad Q_{jk}(x, y) = \eta_{jk}(x, y)Q(x, y), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Para cualquier par de índices  $j, k$ , el conjunto

$$(\text{soporte}(P_{jk}) \cup \text{soporte}(Q_{jk})) \cap K$$

se contiene en un sólo rectángulo del recubrimiento. Por lo tanto, obtenemos la fórmula de Green para la forma  $P_{jk} dx + Q_{jk} dy$ . Como

$$\sum_{j,k} P_{jk} = P, \quad \sum_{j,k} Q_{jk} = Q$$

(en ambos casos podemos considerar un sumatorio finito), se obtiene la fórmula de Green (29.1) para la forma general  $P dx + Q dy$ .  $\square$

# Apéndice 2

## sobre el uso del paquete “Transformaciones conformes” (diseñado por el autor de la memoria) <sup>6</sup>

Como ya hemos comentado en la Introducción para el profesor, contemplamos dos formas de uso del paquete:

- 1) Sólo por el profesor, utilizando un ordenador y un proyector;
- 2) Organizando prácticas de laboratorio para los estudiantes.

El paquete consiste de varios programas.

Aquí sólo presentamos el módulo principal, que es el único que tiene que redactar el usuario en función del problema concreto que está resolviendo.

El típico problema que se puede resolver con este paquete es el siguiente: Dada una sucesión de transformaciones conformes que llevan sucesivamente el disco unidad a distintos dominios simplemente conexos, visualizar el disco unidad con un mallado (compuesto de radios y de circunferencias centradas en el origen, distribuidos de manera regular), los sucesivos dominios, que se obtienen como correspondientes imágenes del disco unidad, y sus correspondientes mallados.

Éste es un típico módulo principal:

### Programa 1

Este programa está escrito en MatLab y consiste de dos partes (antes y después de la línea de división). En la primera parte, el estudiante introduce su nombre y posiblemente cambia los parámetros enteros  $N$ ,  $Nx$ ,  $Ny$  y el parámetro  $h$ . Estos parámetros determinan las características del mallado (básicamente, la cantidad de radios y la cantidad de circunferencias). El comando SHOW(W) visualiza un mallado del disco unidad; en nuestro caso este mallado consiste de 60 radios.

El paquete no ayuda a encontrar las fórmulas de la transformación, pero permite comprobarlas. Este paquete potencia el desarrollo de la intuición del estudiante.

El Programa 1 fue diseñado para resolver el siguiente problema:

*Encontrar una transformación conforme que lleve el disco unidad en la región Hyp, comprendida entre las dos ramas de la hipérbola*

$$\text{Hyp} = \left\{ S = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} : \sigma^2 - \frac{\tau^2}{3} < 4 \right\}.$$

---

<sup>6</sup>Los dibujos que incluimos en el Apéndice 2 pueden tardar un poco en visualizarse en la pantalla del ordenador

Es la región, comprendida entre las dos ramas de la hipérbola  $\sigma^2 - \frac{\tau^2}{3} = 4$ .

Usaremos la notación  $S \stackrel{\text{def}}{=} \sigma + i\tau$ ,

$$\mathbb{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}, \quad \mathbb{C}_+ = \{t \in \mathbb{C} : \text{Re } t > 0\},$$

$$\text{Ang} = \{s \in \mathbb{C} : s \neq 0, \pi/6 < \arg s < 5\pi/6\}.$$

La solución viene dada por la siguiente sucesión de transformaciones conformes:

$$W \in \mathbb{D} \xrightarrow{T = \frac{1-W}{1+W}} T \in \mathbb{C}_+ \xrightarrow{L = iT^{2/3}} L \in \text{Ang} \xrightarrow{S = \frac{1}{2}(L+1/L)} S \in \text{Hyp}.$$

La última transformación es de Joukowski (ver Sección 24).

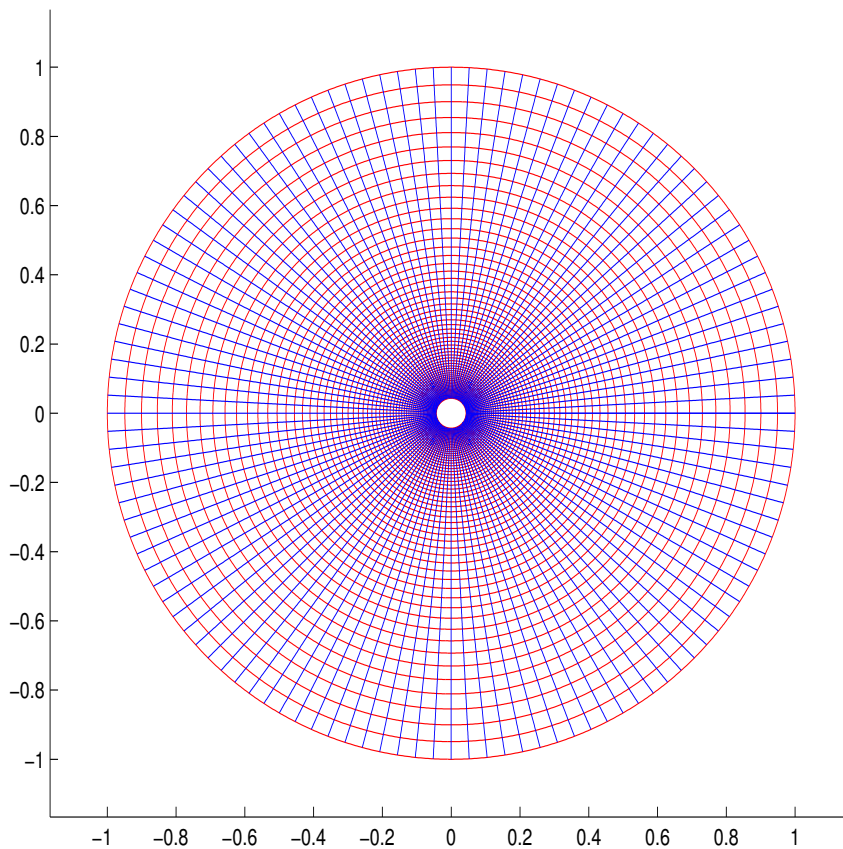
La primera parte del programa calcula la matriz  $W$ , que contiene los puntos del mallado del disco unidad. Como ya hemos dicho, el comando **show(W)** visualiza un mallado del disco unidad (ver Fig. 4).

Los comandos

$$T = (1-W) ./ (W+1); \quad L = i * T.^{(2/3)}; \quad S = (1/2) * (L+1./L);$$

calculan las matrices  $T$ ,  $L$ ,  $S$ , que encriptan los mallados de los dominios  $\mathbb{C}_+$ , Ang, Hyp, respectivamente.

Los comandos

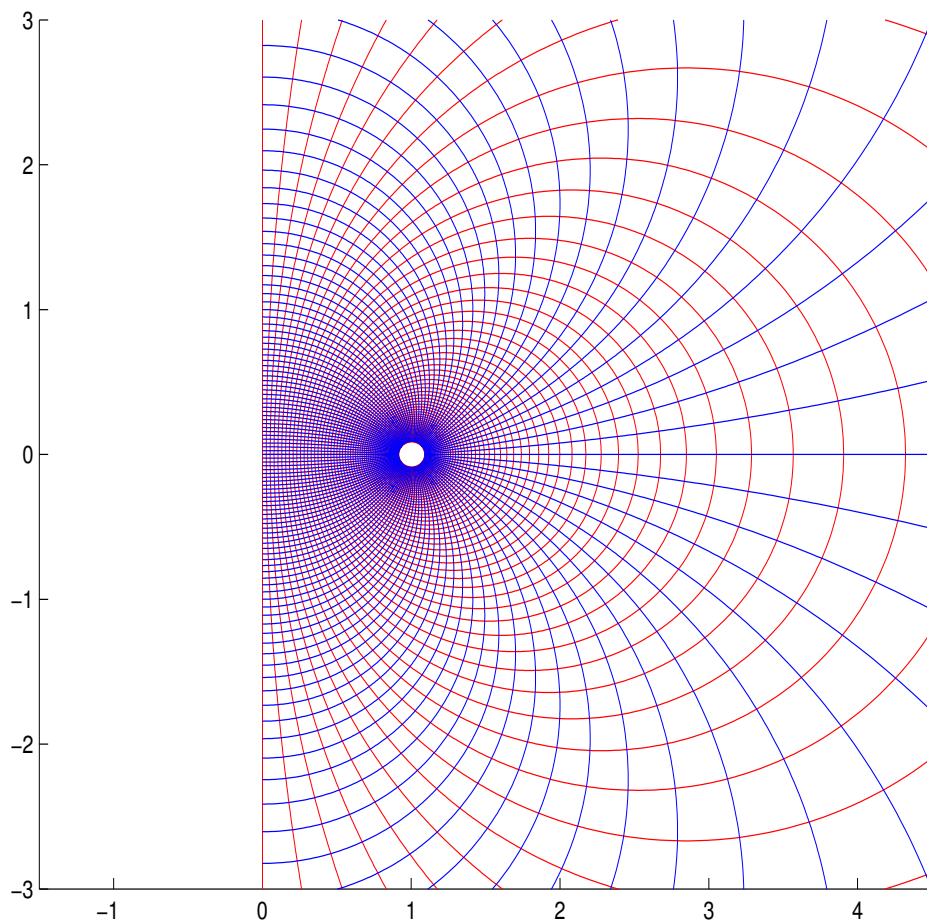


**Fig. 4.** El mallado del disco unidad  $\mathbb{D}$  (“el plano  $w$ ”)

```
showinf(T,3); showinf(L,1); showinf(S,1.5);
```

visualizan los mallados de estos dominios. El paquete incluye las rutinas **init\_z**, **show**, **showinf**. La rutina **init\_z** calcula la matriz  $Z$ , que encripta un mallado de un rectángulo (en nuestro caso, es el rectángulo  $[-\pi, 0] \times [0, 2\pi]$ ). La rutina **show** está diseñada para visualizar mallados de dominios acotados. La rutina **showinf** sirve para visualizar mallados de dominios no acotados. Sólo se ve la parte del mallado contenida en un cuadrado de tipo  $[-R, R] \times [-R, R]$ . El segundo parámetro de la función **showinf** de MatLab determina este parámetro  $R$ .

Si ponemos en marcha el Programa 1, aparecen 4 ventanas (ver Figs. 4-7).

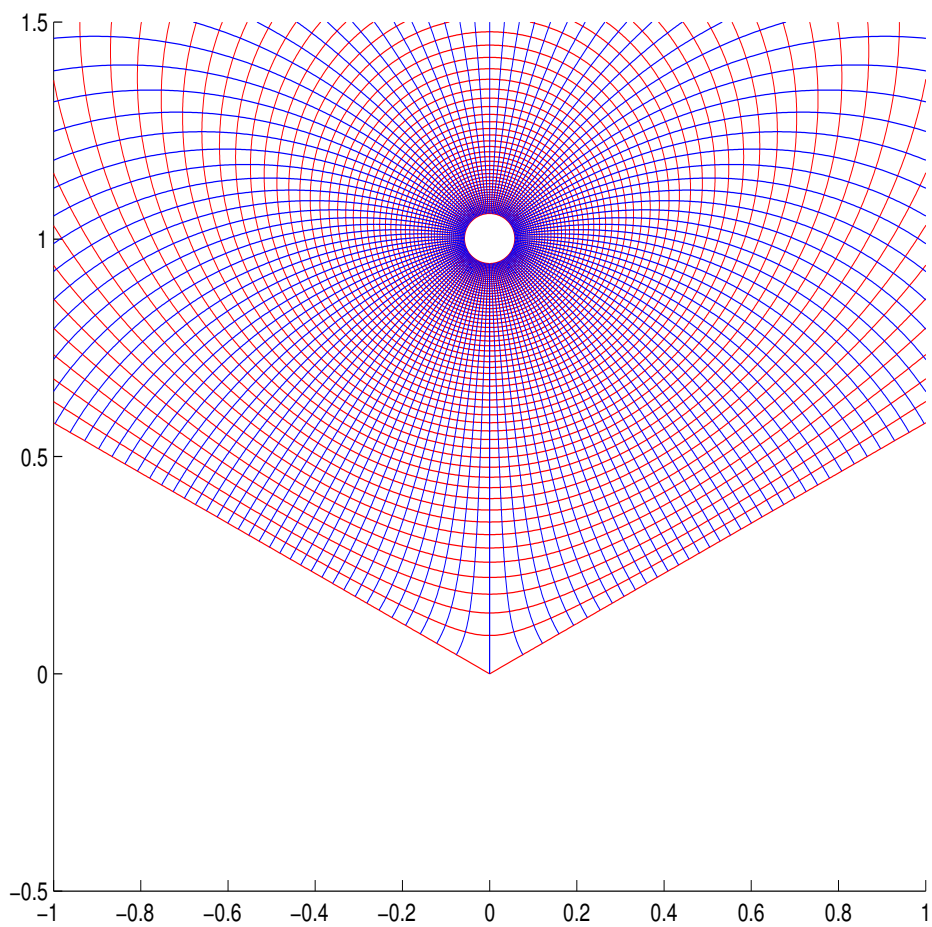


**Fig. 5.** El mallado del plano derecho  $\mathbb{C}_+$ , que se obtiene como la imagen del mallado del disco unidad por la transformación conforme  $T = \frac{1-W}{1+W}$

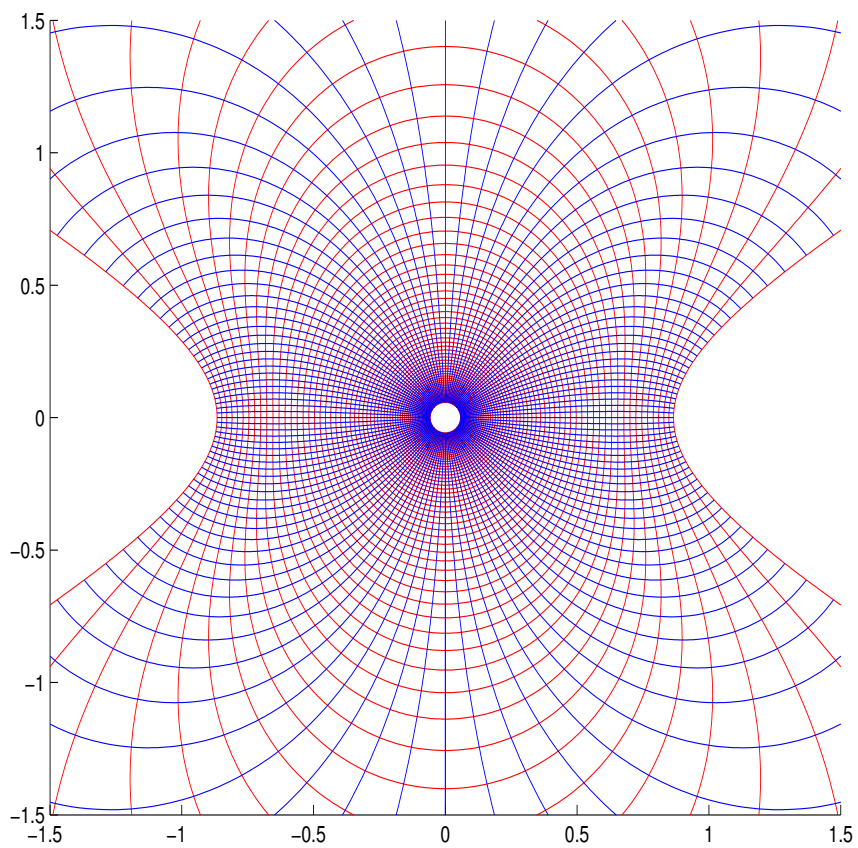
De igual forma, el siguiente programa visualiza la transformación conforme del disco unidad en el plano  $W$  sobre el exterior de la parábola  $x = 1 - \frac{y^2}{4}$  en el plano  $G$  (ver Sección 22).

### Programa 2

```
clear all; close all;
nombre_de_estudiante= ' Fernandez Lopez';
problem= ' Problema 22';
a=-pi; c=0;      %El vertice izquierdo inferior del rectangulo
save dataprobl nombre_de_estudiante problem
```



**Fig. 6.** Un mallado del ángulo  $\text{Ang}$ , que se obtiene como la imagen del mallado de  $\mathbb{C}_+$  por la transformación conforme  $L = iT^{2/3}$ .



**Fig. 7.** Un mallado del dominio Hyp con frontera hiperbólica. Se obtiene como la imagen del mallado del ángulo Ang por la transformación de Joukowski  $S = \frac{1}{2}(L + 1/L)$ .

```

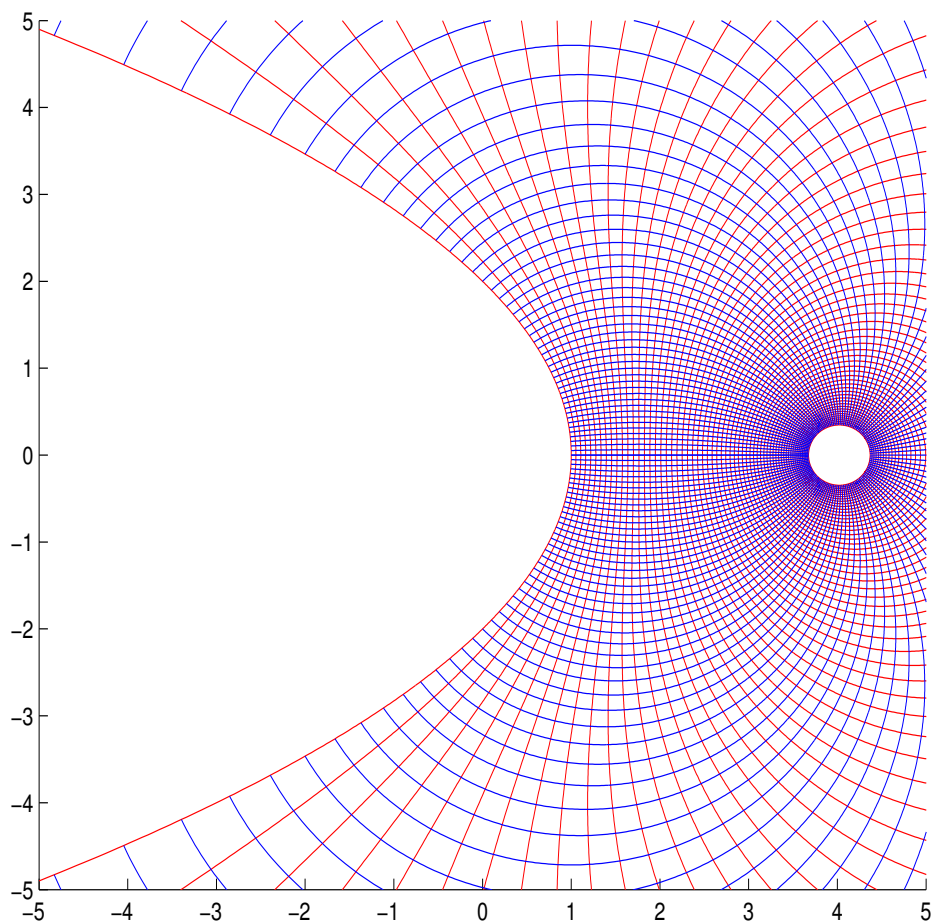
h = pi/600; N = 10; Nx = 60; Ny = 120; chpz=1e-7*(1+i);

init_z;
W = exp(Z);      %Circunferencia unidad
% show (W);
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
T=(1-W)./(W+1); G=(T+1).^2; showinf(G,5);

```

Al correr el Programa 2, aparece una ventana con el dibujo, presentado en la Figura 8.





**Fig. 8.** Un mallado del exterior de una parábola. Se obtiene como imagen del mallado del disco unidad por la composición de la transformación  $T = \frac{1-W}{1+W}$ , que lleva  $\mathbb{D}$  en  $\mathbb{C}^+$ , y  $G = (T + 1)^2$ , que lleva  $\mathbb{C}^+$  en el exterior de la parábola  $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ .