Teoría de la Integral y de la Medida 2023-24 **Segundo parcial**

Apellidos: **Nombre:**

(*La duración del examen es de 2 horas*)

1) En $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, sea ν la medida de contar. Definimos entonces

$$\mu^*(A) = \nu(A)^{1/3}, \qquad A \subset \mathbb{Z}.$$

Demuestra que μ^* es una medida exterior y que sus únicos conjuntos medibles son $\emptyset$ y $\mathbb{Z}$.

2) Sea μ una medida de Lebesgue-Stieljes en $\mathbb{R}$ tal que $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Denotamos por F su función de distribución. Determinar F sabiendo que:
a) $F(x)$ toma solamente los valores 0, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}$ y 1.
b) $\mu((-\infty, a]) = 0$ si $a < 1$.
c) $F(1) = \frac{1}{5}$.
d) $\mu((1,2)) < F(2) - F(1)$.
e) $\mu([3,4]) > F(4) - F(3)$.
Calcular $\mu([0,1])$, $\mu([2,3))$ y $\mu([0,3) \cap \mathbb{Q})$.

3) Sean $g, h \in L^1(dm)$, donde dm es la medida de Lebesgue en $[0,1]$. Definimos

$$G(x) = \int_0^{\sqrt{1-x^2}} g(y)\, dm(y), \quad H(y) = \int_0^{\sqrt{1-y^2}} h(x)\, dm(x).$$

Aplicando el Teorema de Fubini, demostrar que

$$\int_0^1 h(x)G(x)\, dm(x) = \int_0^1 H(y)g(y)\, dm(y).$$