Teoría de la Integral y de la Medida

Universidad Autónoma de Madrid

Figura 1: Henri Lebesgue

Curso 2017/2018
Fernando Soria
(con algunas correcciones de Dmitry Yakubóvich y de Fernando Quirós en 2020 – 2022)

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. La integral hasta 1900 - la integral de Riemann

DEFINICIÓN 1.1 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada y sea* $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ *una partición del intervalo* $[a,b]$. *Sea* $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \ldots$ *y sean tambien* $s_j = \sup_{I_j} f(x)$ *y* $i_j = \inf_{I_j} f(x)$.

Definimos las sumas superior e inferior como

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} s_j\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} i_j\,(x_j - x_{j-1})$$

Decimos entonces que f *es integrable* **en el sentido de Riemann** *si existen particiones que permitan aproximar las sumas anteriores de forma arbitraria.*

TEOREMA 1.1 *Toda función* f *continua definida en un intervalo cerrado es integrable en el sentido de Riemann. Lo mismo es cierto si* f *es acotada y tiene solo un número finito de discontinuidades.*

Ejemplo

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Consideramos la partición $\mathcal{P} = \{x_j = \frac{j}{n}$, con $j = 0, 1, \ldots n\}$. Entonces

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

De esta forma se tiene que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) - \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, lo que implica que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

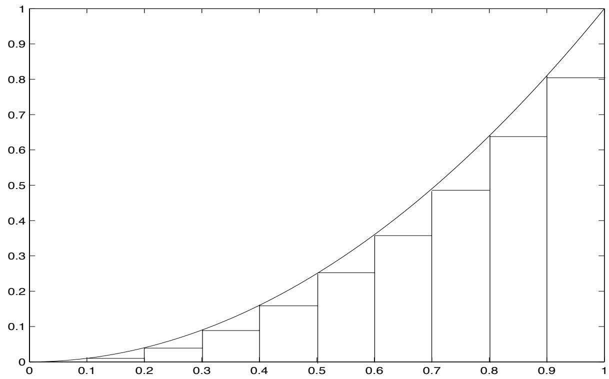


Figura 1.1: Suma inferior para la función x^2. En este caso $n = 10$

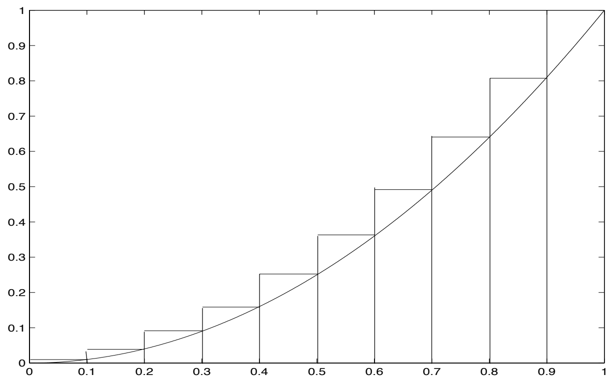


Figura 1.2: Suma superior para la función x^2. En este caso $n = 10$

Damos a continuación un ejemplo de función no integrable Riemann (la función de Dirichlet):

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2n} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Esto es debido a que $\forall \mathcal{P}$ particion se tiene que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = 1$ y que $\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = 0$. Con lo que no es cierto que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) - \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Observación Es fácil ver que la función

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2n},$$

es igual a cero salvo en un número finito de puntos. Por tanto es integrable en el sentido de Riemann y se tiene $\int f_m(x)\,dx = 0, \quad \forall m$. En particular

$$\lim_{m\to\infty} \int f_m(x)\,dx = 0.$$

Antes de desarrollar su teoría, Lebesgue demostró el siguiente resultado de caracterización de funciones que son integrables en el sentido de Riemann:

TEOREMA 1.2 (de Lebesgue) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- *f es integrable en el sentido de Riemann*
- *El conjunto de discontinuidades de f, es decir, $\mathcal{D}_f = \{x \in [a,b] : f \text{ no es continua en } x\}$ verifica la propiedad de que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar un cubrimiento numerable de $\mathcal{D}_f$ por intervalos abiertos $\{(a_j, b_j\}_{j\geq 1}$ que cumple*

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

(Los conjuntos con esta propiedad se denominan de medida cero).

1.2. La cuerda vibrante (método de Fourier))

Queremos encontrar $u(x,t)$ que verifique

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Ecuación de Ondas)
- $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $\forall t$;
- $u(x,0) = f(x)$, $\forall x$; (dato inicial).

Observamos que $u_n(x,t) = \cos(\omega n t)\,\mathrm{sen}\,(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, son soluciones simples de la EDP y, por ser la EDP lineal, cualquier combinación lineal de éstas,

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega n t)\,\mathrm{sen}\,(nx), \quad \text{con} \quad a_n \in \mathbb{R}\,, \mathbb{C},$$

también es solución. Para que $u_N(x,t)$ verificase las condiciones iniciales y de contorno, se debería tener

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\,\mathrm{sen}\,(nx) = f(x),$$

lo cual no es cierto en general (entre otras cosas porque la parte izquierda es una función analítica). Supongamos que tenemos en su lugar una serie infinita.

La idea de Fourier es la siguiente: como "toda"función π-peródica f se puede escribir en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx),$$

para ciertos "números" $\{a_n\}_n$, entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega n t) \operatorname{sen}(nx),$$

es la solución a la ecuación de ondas dada.

Nos preguntamos cómo serían los a_n para que esto fuera posible. Para ello debemos fijarnos en que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Entonces, si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$, se tiene formalmente que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx)\, dx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \right) \operatorname{sen}(mx)\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx)\, dx = a_m \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos una fórmula para los a_n [1]:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx.}$$

El problema es que para llegar a este resultado, hemos integrado término a término una serie infinita, y eso hay que justificarlo. Si la suma fuera finita, no habría problema. Luego se trata de determinar cuándo es cierto que

$$\int_0^{\pi} \lim_{N\to\infty} f_N(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f_N(x)\, dx.$$

[1] a estos valores se les denomina "coeficientes de Fourier"de f y a la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$, "suma de Fourier"de f

1.3. Diferenciación y la integral de Lebesgue

Uno de los logros del Cálculo diferencial e integral es el denominado *T.F.C.* (Teorema Fundamental del Cálculo):

TEOREMA 1.3 (T. FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) *Sea f continua y definamos $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$. Entonces F es derivable y además $F'(x) = f(x)$, $\forall x$.*

Esto nos permite calcular primitivas para la función f. En general, si sabemos que G es una primitiva de f (i.e. $G' = f$), entonces

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Por definicion de límite, lo que el T.F.C. dice es que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\,dy,$$

Pero, ¿podemos esperar que el límite de la derecha exista, incluso si f no es continua, y coincida además con el valor de f en x? La respuesta viene dada por el hecho de que el límite sí coincide con $f(x)$ en **casi todo punto**, en un sentido que precisaremos más adelante.

A las preguntas planteadas en esta introduccion daremos respuesta con teoremas importantes que permiten obtener resultados de gran utilidad en otras áreas de las matemáticas como la Probabilidad, la resolución de EDPs o el Análisis Funcional.

Además veremos que cualquier teoría de la medida da lugar de forma natural a una teoría de la integral. Y es que INTEGRAR es MEDIR ... y RECÍPROCAMENTE !!

1.4. La integral según Lebesgue

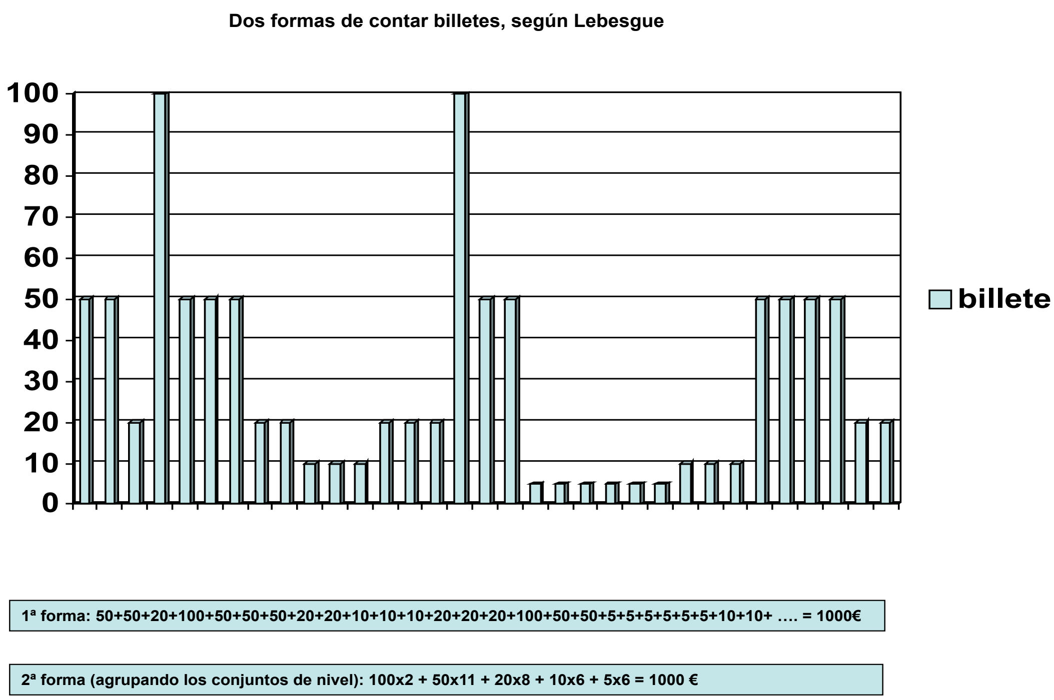
“Hay dos formas de contar el dinero en billetes:

1. sumando su valor directamente según van apareciendo

2. agrupándolos por denominación y sumando al final cada uno de estos grupos”

Aquí la función f que da el valor de cada billete es escalonada. Para una función arbitraria (de momento positiva)

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),$$



dado $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos de nivel

$$E_{k,\varepsilon} = \{x \in D : k\varepsilon < f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}.$$

Supongamos que conocemos la "longitud"de cada $E_{k,\varepsilon}$. Entonces una aproximación por exceso del área encerrada por f viene dada por

$$A_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty}(k+1)\varepsilon \operatorname{long}(E_{k,\varepsilon}),$$

mientras que por defecto viene dada por

$$B_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon \operatorname{long}(E_{k,\varepsilon}).$$

(Ver figura)

La función f será integrable en el sentido de Lebesgue cuando al hacer $\varepsilon \to 0^+$ ambas aproximaciones coincidan. Obsérvese que $A_\varepsilon \geq B_\varepsilon$ y

$$A_\varepsilon - B_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{long}(\{x \in D : \varepsilon < f(x)\}),$$

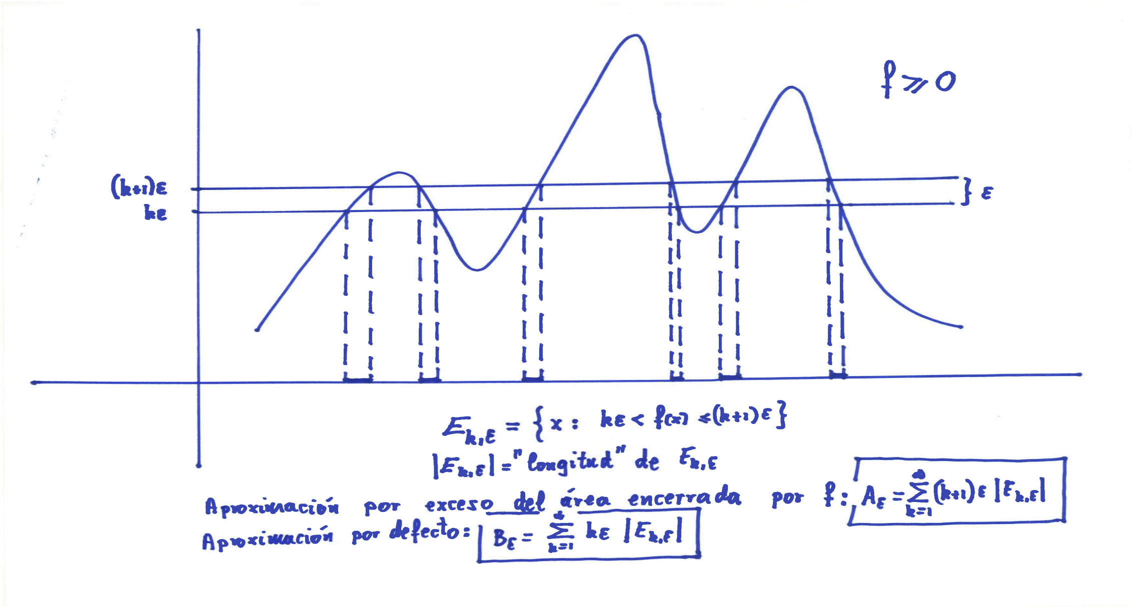


Figura 1.3: Esquema de las aproximaciones a la integral de Lebesgue

si al menos uno de los conjuntos es finito. La función podría no ser acotada.

Ejemplo: $f : (0,1) \to [0,\infty), \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- El método descrito reduce la cuestión a determinar apropiadamente qué se entiende por longitud de un conjunto arbitrario.
- Este es el primer gran concepto de la integral de Lebesgue:
  Para integrar funciones es necesario "medir"primero conjuntos.

Ejemplo: El conjunto (ternario) de Cantor (ver figura).

1.5. El conjunto (ternario) de Cantor

- Los intervalos $\{I_{n,k}\}$, con $n = 1, \ldots, \infty$ y $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, son abiertos y disjuntos
- Los intervalos $\{J_{n,k}\}$, con $n = 1, \ldots, \infty$ y $k = 1, \ldots, 2^n$, son cerrados
- En cada paso retiramos $1/3$ (el tercio central) de cada intervalo $J_{n,k}$ ya construido
- Cada Intervalo $J_{n,k}$ es "padre"de dos intervalos de la clase J del paso $n+1$
- La longitud de cada intervalo $I_{n,k}$ y $J_{n,k}$ construido en el paso n es igual a 3^{-n}

Hay dos formas de calcular la "longitud"[2] del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

[2] a partir de ahora la llamaremos medida, y para un conjunto A escribiremos $\mathrm{med}(A)$.

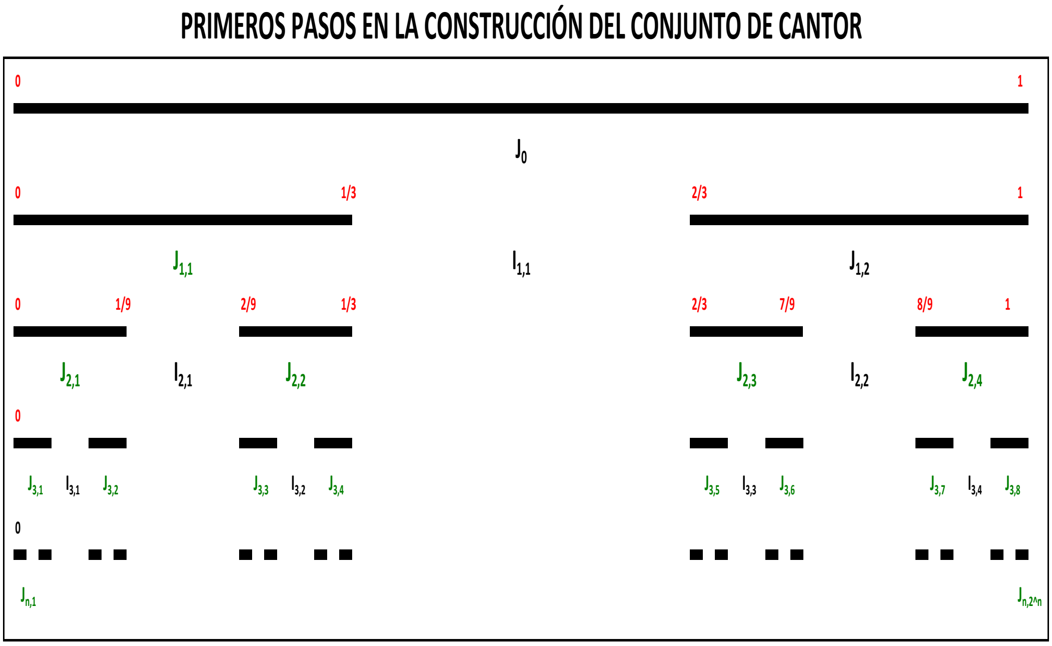


Figura 1.4: $[0,1] = \mathcal{O} \cup \mathcal{C}$, donde $\mathcal{O} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$ y $\mathcal{C} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n}} J_{n,k}$

- Por un lado podemos calcular la medida del abierto $\mathcal{O}$ que es la unión disjunta de todos los intervalos abiertos $\{I_{n,k}\}$:

$$\operatorname{med}(\mathcal{O}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \text{long } (I_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

  Como $\mathcal{O}$ y $\mathcal{C}$ son disjuntos, se debe tener

$$\operatorname{med}(\mathcal{O}) + \operatorname{med}(\mathcal{C}) = \operatorname{med}([0,1]) = 1, \quad \text{luego} \quad \operatorname{med}(\mathcal{C}) = 0.$$

- Por otro, si llamamos $\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, se tiene $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n, \forall n$, y por tanto

$$\text{med } (\mathcal{C}) \le \text{med } (\mathcal{C}_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \operatorname{med}(J_{n,k}) = \frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0, \quad \text{si } n \to \infty.$$

  De nuevo se concluye $\operatorname{med}(\mathcal{C}) = 0$.

Algunas propiedades del conjunto ternario de Cantor:

- $\mathcal{C}$ es un **conjunto perfecto**, es decir
  - es cerrado
  - coincide con todos sus **puntos de acumulación** (i.e., no tiene puntos aislados)
- $\mathcal{C}$ es **compacto** (cerrado y acotado)
- $\mathcal{C}$ es **totalmente desconexo** (i.e., dados dos puntos cualesquiera de $\mathcal{C}$ el segmento que los une no está en $\mathcal{C}$)
- El conjunto de Cantor se puede caracterizar a partir de la descomposición en base 3 de todo número de $[0,1]$ como

$$\mathcal{C} = \{x \in [0,1] : x = \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{3^k}, \text{ con } a_k = 0, 2\}.$$

- $\mathcal{C}$ tiene el **cardinal del continuo** (en realidad todo conjunto perfecto de la recta real es no numerable). La siguiente aplicación es biyectiva (!):

$$\varphi : [0,1] \to \mathcal{C}; \text{ si } x = \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{2^k}, b_k = 0, 1, \text{ entonces } \varphi(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{2b_k}{3^k}.$$

  (Paso de base 2 a base 3).

- **... además, como hemos visto, el conjunto ternario de Cantor tiene medida 0**.

- Dirichlet conjeturó que todo conjunto cerrado totalmente desconexo debería tener medida cero.

Sin embargo, se pueden construir conjuntos de Cantor similares al ternario pero que NO tengan medida cero:

Conjuntos de Cantor generalizados

El proceso es similar:

- Se elige un valor $0 < \alpha < 1/3$. En el primer paso se elimina el intervalo abierto central, $I^{\alpha}_{1,1}$ de longitud α. A los dos intervalos restantes, $J^{\alpha}_{1,k}, k = 1, 2$, se les quita los intervalos centrales $I^{\alpha}_{2,k}, k = 1, 2$, de longitud α^2. Quedan ahora cuatro intervalos cerrados $J^{\alpha}_{2,k}, k = 1, 2, 3, 4$, de los que se eliminan los intervalos centrales $I^{\alpha}_{3,k}, k = 1, 2, \ldots, 8$, de longitud α^3 y se continua el proceso por inducción.

- El conjunto de Cantor de orden α viene definido por la expresión

$$\mathcal{C}^\alpha = [0,1] \setminus \mathcal{O}^\alpha, \quad \text{donde} \quad \mathcal{O}^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}^\alpha; \quad \left(\mathcal{C}^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}^\alpha \right).$$

- Como

$$\text{med}(\mathcal{O}^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \text{long } (I_{n,k}^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\alpha^n = \frac{\alpha}{1-2\alpha},$$

obtenemos

$$\text{med}(\mathcal{C}^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{1-2\alpha} = \frac{1-3\alpha}{1-2\alpha}.$$

Este valor es estrictamente positivo si $\alpha < 1/3$, lo cual coincide con la condición impuesta.

- Es fácil ver también que

$$\text{med}(\mathcal{C}^\alpha) = \lim_{n\to\infty} \text{med}(\mathcal{C}_n^\alpha), \quad \text{donde} \quad \mathcal{C}_n^\alpha = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}^\alpha.$$

1.6. Una primera definición de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

A la vista de lo anterior, nos aventuramos a hacer la siguiente

DEFINICIÓN 1.2 *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se define su "medida" de Lebesgue como*

$$\textit{med}(A) = \inf \left\{ \sum_{k\geq 1} \textit{long } (I_k), \ \textit{con } \{I_k\} \textit{ intervalos, y } \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A \right\}.$$

En particular se tiene

LEMA 1.4 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene "medida" de Lebesgue cero si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \{I_k\} \textit{ sucesión de intervalos, con } \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A, \textit{ tal que } \sum_{k\geq 1} \textit{long } (I_k) < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.3 *Una determinada propiedad $\mathcal{P}$ se dice que se cumple en casi todo punto (c.t.p.) si el conjunto de puntos donde NO se cumple $\mathcal{P}$ tiene medida cero.*

Propiedades de la "medida" de Lebesgue en $\mathbb{R}$

1. $\text{med}(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subset B$ entonces $\text{med}(A) \leq \text{med}(B)$.

3. Dada una familia numerable de subconconjuntos, $\{A_k\}_k$, entonces

$$\mathrm{med}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} \mathrm{med}(A_k).$$

Además,

- La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.

LEMA 1.5 *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces med$(I) =$ long(I).*
(La demostración utiliza propiedades topológicas muy finas ...)

Conjuntos no medibles para la "medida"de Lebesgue
La propiedad 3 anterior no es totalmente satisfactoria. Nos gustaría que si la familia de conjuntos $\{A_k\}_k$ fuera disjunta, entonces, se tuviera la igualdad:

$$\mathrm{med}\left(\biguplus_{k\geq 1} A_k\right) = \sum_{k\geq 1} \mathrm{med}(A_k), \quad \text{(numerablemente aditiva)}.$$

Además, para que recoja las propiedades habituales de los movimientos rígidos, debería cumplirse que la medida no cambiará si realizamos una traslación (o rotación). En particular,

$$\mathrm{med}(x + A) = \mathrm{med}(A), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \subset \mathbb{R}.$$

El problema es que, con estas condiciones no todo todo conjunto es medible.

Contraejemplo:

En $[0,1]$ definimos la relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sea A^* el conjunto formado por un elemento de cada clase de equivalencia (axioma de elección). Entonces A^* "no se puede medir".

1.7. Medida exterior

DEFINICIÓN 1.4 *La función sobre conjuntos definida anteriormente se denomina medida exterior para la medida de Lebesgue y se denota por m^*; es decir, $\forall A \subset \mathbb{R}$,*

$$m^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{k\geq 1} long\ (I_k),\ \ con\ \{I_k\}\ intervalos,\ y\ \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A\right\}.$$

Según veremos posteriormente, existe una clase de subconjuntos, que denominaremos medibles, sobre los cuales m^* será numerablemente aditiva.

Lebesgue definió los subconjuntos medibles de $[0,1]$ de la siguiente forma

DEFINICIÓN 1.5 $A \subset [0,1]$ *es medible si $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$. ($\mathcal{C}A = [0,1] \setminus A$)*

- NOTA: como siempre se tiene $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) \geq 1$ (por la propiedad 3), basta con exigir $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) \leq 1$ para que A se medible.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$: Probar que, con esta definición, todo subconjunto de $[0, 1]$ de medida cero es medible.

1.8. A modo de RESUMEN

Los aspectos fundamentales que hemos resaltado en esta introducción a la Teoría de la Integral de Lebesgue son:

- La integración de funciones se puede obtener a partir de un desarrollo apropiado de una teoría de medir conjuntos.

- Esta teoría proporciona inicialmente una aproximación a la medida de “cualquier” conjunto, a través de la medida exterior de Lebesgue,

- Aunque existen conjuntos que **no** pueden ser medidos, . . . sí permite analizar conjuntos “extraños”de medida pequeña, como el conjunto de Cantor.

- El que no todos los conjuntos sean medibles nos obliga a restringir la teoría de la medida a clases de conjuntos que sean cerradas por uniones, intersecciones y complementarios (álgebras, σ-álgebras).

- La Teoría de Lebesgue permite en condiciones muy generales el intercambio del orden de funcionales límites (sumas, integrales, Fubini, etc) a través de teoremas intrínsicos (TCM, Fatou, TCD).

- Existe una Teoría de Diferenciación que extiende el conocido Teorema Fundamental del Cálculo y que se puede usar no solo sobre funciones sino también sobre medidas (Teorema de Radon-Nikodym)

Capítulo 2

Teoría de la medida y de la integral de Lebesgue

En la introducción nos hemos referido siempre, por cuestiones históricas, a la medida original de Lebesgue (es decir, a la que asigna a un intervalo de la recta $I = [a,b]; [a,b); (a,b]; (a,b)$, su longitud $|I| = b - a$).

Sin embargo, la teoría de Lebesgue se extiende de una forma natural y sencilla a casos más generales. Primero consideramos la estructura de la clase de conjuntos que vamos a medir, (*y que eventualmente llamaremos medibles*).

DEFINICIÓN 2.1 *Dado un conjunto X (en general $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, [0,1], \dots$), se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es* **σ-álgebra** *si verifica:*

1. *$X \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrada por complementación, esto es $\quad A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.*
3. *$\mathcal{A}$ es cerrada por uniones numerables, finitas o no, esto es*

$$A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}.$$

NOTAS:

- (2) y (3) nos dicen que $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones, porque

$$\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c.$$

- $\mathcal{A}$ es cerrada por diferencias, porque

$$A, B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

- (1) Se podría sustituir por la afirmación de que $\mathcal{A}$ es no vacía, pues basta que exista $A \in \mathcal{A}$ para concluir por las dos notas anteriores que $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$

- Si en la definición, nos limitamos a exigir sólo que la unión finita de conjuntos está en $\mathcal{A}$, entonces se dice que $\mathcal{A}$ es una **álgebra**.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ es siempre una σ-álgebra.

LEMA 2.1 *Si $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{D}}$ es una colección arbitraria de σ-álgebras, entonces $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{D}} \mathcal{A}_\alpha$ es una σ-álgebra.*

Demostración: Ejercicio

Este Lema nos permite hablar para una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ de la **σ-álgebra generada por $\mathcal{B}$** como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{B}$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ se define la **σ-álgebra de Borel**, $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ como aquella generada por los intervalos abiertos

$$\{(a,b): \quad a,b\in\mathbb{R}, \quad a<b\}.$$

Ejercicio: Probar que $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ coincide con la generada por los intervalos cerrados $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$, o por los semiabiertos $\{[a,b) : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$, o $\{(a,b] : a,b\in\mathbb{R}, a<b\}$ o por las semirectas $\{[a,\infty) : a\in\mathbb{R}\}$ o $\{(\infty, b]) : b\in\mathbb{R}\}$...

2.1. Funciones medibles Lebesgue

A continuación pasamos a describir las funciones que vamos a integrar

DEFINICIÓN 2.2 *Diremos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible (o medible respecto a la σ-álgebra $\mathcal{A}$) si $\forall a\in\mathbb{R}$ se tiene*

$$f^{-1}((a,\infty)) = \{x\in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Muchas veces va a resultar ventajoso trabajar con funciones de X al *eje real extendido*

$$\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Definimos las operaciones aritméticas sobre este conjunto de la misma forma que se hizo en el Cálculo I en el tema de operaciones con los límites (de forma que, por ejemplo, $-\infty + 7 = -\infty$, mientras que $-\infty + (+\infty)$ y $(+\infty)/(+\infty)$ no están definidos).

DEFINICIÓN 2.3 *Sea $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una función con valores en el eje real extendido. Diremos que f es $\mathcal{A}$-medible (o medible respecto a la σ-álgebra $\mathcal{A}$) si $\forall a\in\mathbb{R}$ se tiene*

$$f^{-1}((a,+\infty]) = \{x\in X : f(x) \in [a,+\infty]\} \in \mathcal{A}.$$

Es fácil ver que si f es $\mathcal{A}$-medible, entonces los conjuntos $f^{-1}(\{+\infty\})$ y $f^{-1}(\{-\infty\})$ son medibles (es decir, son elementos de $\mathcal{A}$).

LEMA 2.2 *Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-medible, la familia*

$$\mathcal{A}_f = \{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$. En consecuencia, contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (σ-álgebra de Borel) porque $(a, \infty) \in \mathcal{A}_f$, $\forall a$, por definición.

En particular, la definición de función medible es equivalente a pedir

- $\{x : f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall b.$
- $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a.$
- $\{x : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall b.$
- $\{x : a < f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a, b.$
- La imagen inversa de todo abierto (o cerrado, o Borel) es $\mathcal{A}$-medible.

Finalmente, damos la definición abstracta de medida:

DEFINICIÓN 2.4 *Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X. Se dice que $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ es una* **medida** *sobre $\mathcal{A}$ si :*

1. *$\mu(\emptyset) = 0$.*

2. *Para toda familia numerable $\{A_j\}_{j\geq 1}$de $\mathcal{A}$ cuyos elementos son disjuntos dos a dos, se tiene*

$$\mu\left(\biguplus_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j).$$

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$. Definimos para $A \subset \mathbb{R}$,

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, \text{ si } x_0 \in A \\ 0, \text{ si } x_0 \notin A, \end{cases}$$

   entonces δ_{x_0} (Delta de Dirac en x_0) es una medida.

2. En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definimos

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A), \text{ si } card(A) < \infty, \\ \infty, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

   Entonces, μ es una medida.

3. En $\mathbb{Z}$ sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Definimos para $A \subset \mathbb{Z}$, $\mu(A) = \sum_{n\in A} \frac{1}{1 + |n|}$;

   entonces, μ es una medida.

4. En $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sean $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \lambda > 0$ y $\mu_\lambda(A) = e^{-\lambda} \sum_{n \in A} \frac{\lambda^n}{n!}$,

   para cada $A \in \mathcal{A}$. Entonces, μ_λ es una medida. (Medida de probabilidad asociada a la distribución de Poisson de índice λ).

2.2. Espacios de medida

DEFINICIÓN 2.5 *Llamaremos* **espacio de medida** *a toda terna* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *compuesta por un conjunto* X*, una* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{P}(X)$*, y una medida* μ *definida sobre* $\mathcal{A}$*. Diremos que la medida* μ *sobre* $\mathcal{A}$ *es* **finita** *si* $\mu(X) < \infty$ *y que es* **σ-finita** *si podemos escribir* $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$*, con* $X_n \in \mathcal{A}$*,* $n = 1, 2, 3, ...,$ *y* $\mu(X_n) < \infty$*.*

En los ejemplos anteriores, las medidas de (1) y (4) son finitas, la de (3) es σ-finita pero no finita y la de (2) no es siquiera σ-finita.

Ejercicios:

1. Si $f, g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ son medibles, probar que las funciones $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son medibles.

2. Probar que el supremo y el ínfimo de una familia numerable de funciones medibles, es medible. *Indicación*: $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$; (obsérvese la nueva notación).

3. Deducir que el $\limsup$, $\liminf$ y $\lim$ de funciones medibles son todos medibles

4. Supongamos que $f, g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ son medibles y $f + g$ está bien definida, es decir, la expresión $f(x) + g(x)$ nunca toma la forma $-\infty + (+\infty)$ o $+\infty + (-\infty)$. Probar que la suma $f + g$ es medible.

   Indicación:
   $$\{f + g > a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g > a - q\}) .$$

5. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, probar que la composición $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.

Primer resultado de monotonía para conjuntos

PROPOSICIÓN 2.3 *Sea μ una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$; se tienen los siguientes resultados:*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además si $\mu(A) < \infty$, se tiene que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

2. *Si $A_1 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1} ...$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, entonces $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j)$.*

3. *Si $A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1} ...$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, y $\mu(A_1) < \infty$, entonces*
   $$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j \to \infty} \mu(A_j).$$

Un ejemplo de por qué la condición $\mu(A_1) < \infty$ de 3 es necesaria: en el ejemplo 3 de páginas anteriores, sean $A_m = \{m, m + 1, m + 2, ...\}$ con $m = 1, 2, 3, ...$, entonces $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \emptyset$ pero $\lim_{m \to \infty} \mu(A_m) = \infty$ (porque de hecho $\mu(A_m) = \infty$, $\forall m$) .

2.3. Integración de funciones medibles positivas

Durante todo el curso, emplearemos el término “función positiva” en el sentido de “función no negativa”.

DEFINICIÓN 2.6 *Dado un conjunto A, se define la función característica o indicatriz de A como:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 2.7 *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (X conjunto, $\mathcal{A}$ σ-álgebra, μ medida) se dice que $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función simple si se puede escribir como una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos de $\mathcal{A}$. Es decir*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \qquad con\ c_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{A}, \quad j = 1, 2, 3, ..., n.$$

- Por un reordenamiento de las constantes c_j, se puede suponer siempre que los A_j son disjuntos.

- Una función es simple si y solo si es medible y su rango está compuesto por un número finito de valores.

DEFINICIÓN 2.8

- *Para una función simple*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \tag{2.1}$$

se define su integral como sigue:

$$\int_X s(x) d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j),$$

siempre que bien $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j = 1, 2, \dots n$, o bien los c_j sean positivos, en cuyo caso no importa que los A_j sean de medida finita o no.

El valor de la integral va a ser el mismo si pasamos de la representación de $s(x)$ a otra, $s(x) = \sum_{j=1}^{n'} c'_j \chi_{A'_j}(x)$ donde los conjuntos A'_j son disjuntos. Se puede deducir que la definición de la integral $\int_X s\, d\mu$ no depende de la elección de los conjuntos A_j en la representación de s.

- *Para una función $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ medible con $f(x) \geq 0$, $\forall x$, se define su integral como sigue:*

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X s(x) d\mu : 0 \leq s(x) \leq f(x);\ s(x) simple \right\}.$$

  - *El supremo en esta definición podría valer $+\infty$. Esto sucede, en particular, si f toma valor $+\infty$ en un conjunto de medida positiva.*

Ejemplos

1. Si μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y f es la función de Dirichlet, entonces f es simple, $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = 0$
2. Si δ_{x_0} es la medida "Delta de Dirac en x_0", entonces toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y si $f \geq 0$, se tiene $\displaystyle\int f\delta_{x_0} = f(x_0)$
3. En general, si μ es la medida de contar sobre $\mathbb{Z}$, entonces $\displaystyle\int f d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(m)$.
4. Si μ es la medida del ejemplo 3 inicial y definimos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(m) = \frac{1+|m|}{|m|^2}$, con $m \neq 0$ y $f(0) = 0$, entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}} f d\mu = \frac{\pi^2}{3}$.

Observaciones:

1. Es fácil ver que si u y v son funciones simples, $u + v$ es simple y
$$\int (u+v)d\mu = \int u\,d\mu + \int v\,d\mu.$$
2. También, si f y g son medibles y $0 \leq g \leq f$ se tiene $\displaystyle\int g\,d\mu \leq \int f\,d\mu$.

2.4. Teorema de la Convergencia Monótona

Ejercicio importante: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{A_j}$ es una función simple positiva, entonces la función $\nu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ dada por
$$\nu(A) = \int_A s d\mu = \int_X s\chi_A d\mu,$$
define una medida sobre $\mathcal{A}$. Escribiremos $d\nu = s\,d\mu$. Diremos que s es la función densidad (o función derivada) de ν con respecto a μ.

TEOREMA 2.4 (de la convergencia monótona) *Si $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles positivas ($0 \leq f_1 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ... \leq +\infty$) y sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces se tiene*
$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu = \int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)\,d\mu\right).$$
Aquí se permite que tanto las funciones f_n como la función f tomen el valor $+\infty$.

Demostración:

Observemos primero que $\int f_1 \leq \int f_2 \leq \int f_3 \leq ... \leq \int f_n \leq ...$, así que el límite de las integrales siempre existe (aunque podría valer $+\infty$). Además si $f_n \leq f$, entonces $\int f_n \leq \int f$ por lo que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu,$$

Veamos la otra desigualdad, para ello seleccionamos una función simple arbitraria entre las que cumplen $0 \leq s(x) \leq f(x)$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$ (podemos imaginar "α"próximo a 1) definimos para cada n

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}.$$

Es fácil ver:

1. A_n es medible, (porque $A_n = (f_n - \alpha s)^{-1}([0, \infty]))$. (Nótese que la función s solo toma valores finitos)

2. $\{A_n\}$ es creciente ($A_1 \subset A_2 \subset ...$) y

3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Además

$$\int_{A_n} s(x)d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left(\int_X f_n(x)d\mu\right) \leq \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu\right).$$

Usando el resultado de monotonía para conjuntos con respecto a la medida $\nu = s(x)d\mu$ obtenemos

$$\int_X s(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} s(x)d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu\right).$$

Tomando el supremo sobre las funciones simples $s(x)$, con $0 \leq s(x) \leq f(x)$ queda

$$\int_X f(x)d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu\right).$$

Como además α es arbitrario (y próximo a 1) se deduce

$$\int_X f(x)d\mu \leq \lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu.$$

Q.E.D.

Un poco más tarde, deduciremos un análogo del Teorema de convergencia monótona para las series no negativas de funciones. Tenemos que probar antes la aditividad de la integral.

2.5. La aditividad de la integral para funciones no negativas

La obtendremos como una aplicación del TCM. Empezamos con la siguiente observación.

Observación: Sea $f \geq 0$ una función medible y sea $\mathcal{P} = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{N-1} < y_N = +\infty\}$ una partición del semieje $[0, +\infty]$ (entendido como el semieje y). Entonces definimos la función simple

$$f_{\mathcal{P}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_k, \quad \text{si } f(x) \in [y_k, y_{k+1}),\ 0 \leq k \leq N-1.$$

Para $k = N-1$, utilizamos en esta definición el intervalo $[y_{N-1}, y_N] = [y_{N-1}, +\infty]$ en vez del intervalo $[y_{N-1}, +\infty)$.

Entonces para toda partición $\mathcal{P}'$, más fina que $\mathcal{P}$, (es decir, todo punto y_k, que pertenece a $\mathcal{P}$, pertenece también a $\mathcal{P}'$), se tiene $f_{\mathcal{P}'} \geq f_{\mathcal{P}}$.

Efectivamente, dado un $x \in X$, supongamos que $f(x) \in [y_k, y_{k+1})$. Como y_k, y_{k+1} pertenecen a $\mathcal{P}'$, $y_k = y'_m$, $y_{k+1} = y'_{m+n}$ para algunos $m, n \geq 0$. Entonces $f_{\mathcal{P}'}(x) = y'_\ell$ para algún ℓ, $m \leq \ell < m+n$, y por lo tanto, $f_{\mathcal{P}'}(x) \geq f_{\mathcal{P}}(x)$.

Necesitamos el siguiente resultado técnico que nos será de utilidad en numerosas ocasiones.

LEMA 2.5 (Lema técnico) *Sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible y positiva. Entonces existe una sucesión monótona creciente de funciones simples positivas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s_{n+1} \leq ...$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall x. \tag{2.2}$$

Demostración: La idea es la original de Lebesgue. Consideramos las particiones

$$\mathcal{P}_n : \quad 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{n2^n}{2^n} < +\infty.$$

Está claro que la partición $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$, para todo n. Poniendo $s_n = f_{\mathcal{P}_n}$, obtenemos una sucesión creciente de funciones no negativas:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \ldots .$$

Para ver (2.2), observamos que $s_n(x) \leq f(x) < s_n(x) + \frac{1}{2^n}$, si $f(x) < n$. Por tanto, si $f(x) < +\infty$, entonces $f(x) < n$, digamos, para $n \geq N_0$, y se sigue que $s_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$. Si $f(x) = +\infty$ para algún valor de x, entonces $s_n(x) = n$ para todo n, y se obtiene también que $s_n \to f(x) = +\infty$ cuando $n \to \infty$.

Q.E.D.

Nota: Este resultado sirve además para dar otra demostración de que si f y g son medibles entonces $f+g$, $g \cdot f$, f/g (cuando esté bien definida) son medibles, por ser límites puntuales de funciones medibles.

Ejercicio: Probar que si f es medible, positiva y su integral es finita entonces $\forall a > 0$ el conjunto $A = \{x \in X : f(x) > a\}$ tiene medida finita. ¿Que ocurriría si $a = 0$?

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.6 *: Si $f, g \geq 0$ medibles, entonces:*

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Demostración:

Si $\int f = \infty$ ó $\int g = \infty$, no hay nada que probar. En caso contrario, por el lema anterior, existen sucesiones de funciones simples $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s_{n+1} \leq ... \longrightarrow f$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq t_{n+1} \leq ... \longrightarrow g$.

Como $0 \leq (s_1 + t_1) \leq (s_2 + t_2) \leq ... \leq (s_n + t_n) \leq (s_{n+1} + t_{n+1}) \leq ... \longrightarrow (f+g)$, en particular $f + g$ es medible, y como el resultado que buscamos es cierto para simples, concluimos

$$\int_X (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n + \int_X t_n \right) = \int_X f + \int_X g$$

Q.E.D.

2.6. Convergencia monótona para series

Del TCM deducimos un resultado que era uno de los objetivos presentados en la introducción:

PROPOSICIÓN 2.7 *Sea $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces:*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x) d\mu \right).$$

(De forma análoga al TCM, se admite que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} g_n(x)$ tome el valor $+\infty$ para algunos valores de x).)

Demostración:

Definimos para cada $N = 1, 2, 3, ...$ $G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x)$. Por definición de serie, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \lim_{N\to\infty} G_N(x)$. Además $0 \leq G_1 \leq G_2 \leq ... \leq G_n \leq ...$, por ser las g_n positivas.

Podemos escribir

$$\int G_N(x) d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int g_n(x) d\mu.$$

Luego por el TCM

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) d\mu = \int \lim_{N\to\infty} G_N(x) d\mu = \lim_{N\to\infty} \int G_N(x) d\mu =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int g_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(x) d\mu.$$

Q.E.D.

Notación y ejercicio: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y f es una función medible y positiva se define para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

Probar entonces que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida sobre $\mathcal{A}$. Al igual que antes, escribiremos $d\nu = f d\mu$ (ó $d\nu = d\mu_f$).

2.7. Lema de Fatou

LEMA 2.8 (Fatou) *Dada una sucesión de funciones medibles y positivas, $\{f_n\}$, se tiene:*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} \left(f_n(x)\right)\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right).$$

Demostración: Es una consecuencia del Teorema de la Convergencia Monóntona.

Sea $g_n(x) = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, ...\}$. Entonces $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_n \leq g_{n+1} \leq ...$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{k\to\infty} f_k$ por definición de límite inferior. Además $g_n \leq f_n$ $\forall n$. por tanto

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} (f_n(x))\right) d\mu = \int_X \lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x) d\mu \overset{TCM}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right).$$

Q.E.D.

2.8. Integral de una función medible arbitraria

Si $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ es medible, entonces se puede escribir $f = f^+ - f^-$ con f^+, f^- funciones medibles positivas ($f^+ = \max(f, 0)$; $f^- = -\min(f, 0)$).

DEFINICIÓN 2.9 *Se dice que f es integrable si $\int f^+ d\mu < \infty$ y $\int f^- d\mu < \infty$ y escribimos*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

<u>Notas</u>:

1) Si f es medible y $f = f^+ - f^-$ entonces $|f| = f^+ + f^-$ y se tiene $\int |f| = \int f^+ + \int f^-$. Por tanto, f es integrable $\Longleftrightarrow \int |f| < \infty$. Además $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

2) Es fácil ver que para cualquier función f integrable, solo uno de los conjuntos $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ puede tener medida positiva.

DEFINICIÓN 2.10 *Dado un espacio de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *se define la clase de funciones "integrables" como*

$$L^1(d\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \quad \textit{medible y tal que} \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

Propiedades de la integral

1. La clase de las funciones integrables es un espacio vectorial.
   Demostración:
   Si f y g son medibles e integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es medible (¿por que?) y además
   $$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|.$$
   Luego, $\displaystyle\int |\alpha f + \beta g| < \infty.$

2. La integral es una aplicación lineal sobre la clase anterior. Es decir, si f y g son integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces
   $$\int (f+g) = \alpha \int f + \beta \int g$$
   e
   $$\int (\alpha f) = \alpha \int f.$$
   Demostración:
   La primera igualdad es cierta para funciones positivas. Si f y g son arbitrarias, denotamos $f + g = h$, luego
   $$f_+ - f_- + g_+ - g_- = h_+ - h_-, \quad \text{es decir,} \quad f_+ + g_+ + h_- = f_- + g_- + h_+.$$
   Se sigue que
   $$\int f_+ + \int g_+ + \int h_- = \int f_- + \int g_- + \int h_+,$$
   lo que se reescribe como
   $$\int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_- = \int h_+ - \int h_-, \quad \text{por tanto,} \quad \int f + \int g = \int h.$$

   Para obtener la segunda igualdad, basta considerar los casos $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y aplicar la definición de $\int (\alpha f)$.

Integración para funciones a valores complejos

DEFINICIÓN 2.11 *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, podemos escribir $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales ($u = Re(f)$, $v = Im(f)$).*

Decimos que f es medible si u y v lo son, y que es integrable si u y v también lo son.

Escribiremos $\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu$. (en este caso, no permitiremos que f tome valores infinitos).

NOTA: Las propiedades de la integral se conservan en este contexto y además f es integrable de nuevo si y solo si $|f|$ también lo es (porque $|f| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ y $|u|, |v| \leq \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \leq |u| + |v|$).

2.9. Medidas completas

DEFINICIÓN 2.12 *Una medida μ sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es una* ***medida completa*** *si $\mathcal{A}$ contiene a todos los subconjuntos de conjuntos (de $\mathcal{A}$) con medida cero, es decir: Si $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, entonces $\forall E \subset A$, se tiene que $E \in \mathcal{A}$; obviamente se tiene además $\mu(E) = 0$.*

Las medidas que hemos visto hasta ahora son todas completas (Delta de Dirac δ_0, medida de contar en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Z}$, etc) porque en todos los casos se tenía $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. La medida de Lebesgue, como veremos, también es completa. Hay una forma directa de completar cualquier medida como vemos en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.9 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, definimos:*

- $\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \subset E \subset B$ *y* $\mu(B \backslash A) = 0\}$;
- *si* $E \in \overline{\mathcal{A}}$ *con* $A \subset E \subset B$ *y* $\mu(B \setminus A) = 0$, *definimos* $\overline{\mu}(E) = \mu(A)$.

Entonces:

(i) $\overline{\mathcal{A}}$ *es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$;*

(ii) $\overline{\mu}$ *es una medida completa que extiende a μ.*

Ejercicio: Probar que también se tiene:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup D : A \in \mathcal{A} \ \exists B \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(B) = 0 \text{ y } D \subset B\}$$

NOTA: Supongamos que ν es cualquier extensión de μ a una medida completa en X, definida sobre un σ-álgebra $\mathcal{A}'$, que contiene a $\mathcal{A}$. Comprobar que

(i) $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}'$ (es decir, $\overline{\mathcal{A}}$ es la σ-álgebra más pequeña, donde puede estar definida una extensión completa de μ);

(ii) $\nu(B) = \overline{\mu}(B)$ para todo conjunto B, que pertenece a $\overline{\mathcal{A}}$.

Demostración del teorema 2.9:

i) Claramente $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (porque si $A \in \mathcal{A}$, entonces (!!!) $A \subset A \subset A$ y $\mu(A \setminus A) = 0$), en particular $X \in \mathcal{A}$.
Además si $E \in \overline{\mathcal{A}}$ entonces $E^c \in \overline{\mathcal{A}}$ (porque si $A \subset E \subset B$, con $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B \setminus A) = 0$, se tiene $B^c \subset E^c \subset A^c$ y $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, por tanto $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$).

Si $E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, $i = 1, 2, ...$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, porque si $A_i \subset E_i \subset B_i$, con $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, se tiene $\cup_i A_i \subset \cup_i E_i \subset \cup_i B_i$ y $\mu(\cup_i B_i \setminus \cup_i A_i) \leq \mu(\cup_i (B_i \setminus A_i)) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0$.

ii) Para probar que $\overline{\mu}$ es una medida, veamos primero que está bien definida:

Si $A \subset E \subset B$ y $C \subset E \subset D$, con $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ y $\mu(B \setminus A) = \mu(D \setminus C) = 0$ tenemos que ver que $\mu(A) = \mu(C)$, pero esto es fácil porque $\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$ y $\mu(A \setminus C) \leq \mu(D \setminus C) = 0$, es decir, $\mu(A) = \mu(A \cap C)$ y de forma similar, $\mu(C) = \mu(A \cap C)$.

La σ-aditividad es similar a lo probado en i).

Sean $E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, disjuntos, $A_i \subset E_i \subset B_i$, con $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, se tiene

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i)$$

(Osérvese que los A_i también son disjuntos).

Por último, $\overline{\mu}$ es completa porque si $A \in \overline{\mathcal{A}}$ es tal que $\overline{\mu}(A) = 0$ y $E \subset A$ como existen $A', B' \in \mathcal{A}$ con $A' \subset A \subset B'$ y $\mu(B' \setminus A') = 0$ y $\mu(A') = 0$, entonces $\mu(B') = \mu(A') + \mu(B' \setminus A') = 0$ también. Entonces $\emptyset \subset E \subset B'$ y se deduce que $E \in \overline{\mathcal{A}}$.

Q.E.D.

2.10. Notas sobre los conjuntos de medida cero

Recordamos que en el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que una propiedad **P se cumple en casi todo punto (c.t.p.)** con respecto a la medida μ si el conjunto $A = \{x : x$ no cumple P$\}$ está en $\mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$.

Por ejemplo, decimos que las funciones medibles f y g coinciden en c.t.p. si $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Ejercicio: Probar que si f y g son integrables y $f = g$ c.t.p., entonces $\int f = \int g$; (por ello, en la clase de funciones integrables se suelen identificar las que coinciden c.t.p.)

El uso de las palabras "en casi todo punto" es más simple si la medida μ es completa. En este caso, para comprobar que una propiedad **P** se cumple en c.t.p., basta ver que hay un conjunto $A \subset X$ de medida 0 tal que la propiedad **P** se cumple en A^c.

Observación: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y sea $\bar{\mu}$ la compleción de μ. Entonces a toda función simple s respecto de $\bar{\mu}$ le corresponde una función simple $\tilde{s}$ respecto de μ, que coincide con s en casi todo punto. Esto implica la siguiente propiedad: si $f : X \to [-\infty, \infty]$ es medible respecto de μ, entonces es medible respecto de $\bar{\mu}$. Si existe la integral $\int_X f\, d\mu$ en el sentido impropio, existe también la integral $\int_X f\, d\bar{\mu}$, y son iguales. Además, f es integrable respecto de μ si y solo si es integrable respecto de $\bar{\mu}$.

Dos resultados que muestran la importancia de la completitud de una medida:
En el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si μ es completa, entonces

1. Si $f = g$ c.t.p. y f es medible entonces g es medible. *Demostración:* Sea $D = \{x : \ f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótesis $\mu(D) = 0$. Dado $a \in \mathbb{R}$, sean $A = \{x : \ f(x) > a\}$ y $E = \{x : \ g(x) > a\}$. Sabemos que A es medible y queremos probar que E también es medible.

   Se tiene que $E \subset A \cup D$ y $A \subset E \cup D$, y por tanto

   $$B_1 = A \setminus D \ \subset \ E \ \subset \ A \cup D = B_2.$$

   Claramente B_1 y B_2 son medibles y $B_2 \setminus B_1 = D$, por tanto $\mu(B_2 \setminus B_1) = \mu(D) = 0$. Por ser μ completa, se tiene que $E \in \mathcal{A}$. **Q.E.D.**

2. Si las f_n son medibles $\forall n$ y $f_n \longrightarrow f$ c.t.p. entonces f es medible
   Indicación: Si $g = \limsup f_n$, entonces g es medible y $g = f$ c.t.p.

Si μ no fuera completa, **los resultados anteriores podrían no ser ciertos**, como vemos en el siguiente ejemplo: Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}$ y $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$ con $\mu(\emptyset) = \mu(\{1, 2\}) = 0$ y $\mu(\{3\}) = \mu(X) = 1$. Definimos $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(1) = f(2) = f(3) = 3$ y $g(x) = x$, entonces

- f es medible
- $f = g$ c.t.p. porque $\{x : f \neq g\} = \{1, 2\}$
- g no es medible, porque $g^{-1}((0, 1]) = \{1\} \notin \mathcal{A}$

Ejercicio: Completar la σ-álgebra y la medida anteriores. [*]

Ejercicios Probar:

- Si f es medible e integrable, entonces $|f(x)| < \infty$ c.t.p., es decir, $\{x : |f(x)| = \infty\}$ tiene medida cero.
- Si $f \in L^1(d\mu)$,

  $$\mu(\{x : \ |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a}\left(\int_X |f(x)| d\mu\right), \quad \forall a > 0.$$

  (Desigualdad de Chebychev)

- Si $f \in L^1(d\mu)$, entonces $|f(x)| < \infty$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$, el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ es σ-finito
- Si $f \geq 0$ y $\displaystyle\int f d\mu = 0$, entonces f=0 c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$ y $\displaystyle\int_E f d\mu = 0$, $\forall E \in \mathcal{A}$, entonces $f = 0$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$ entonces

$$\boxed{\int_X |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt.}$$

Indicación: Probarlo primero para funciones simples y usar luego el TCM.
Nota: Esta igualdad demuestra a las claras la relación existente entre integración y medida en la teoría de Lebesgue. Así, la integral de la función $|f|$ con respecto a la medida μ coincide con la integral impropia de Riemann (!) sobre $(0, \infty)$ de la función decreciente

$$t \to \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}),$$

dada por la medida de los conjuntos de nivel de $|f|$ de altura t.

2.11. Estructura topológica del espacio $L^1(d\mu)$

Definimos la siguiente relación de equivalencia en el espacio $L^1(d\mu)$ de funciones integrables en X:

$$f\mathcal{R}g \iff f = g \quad \text{c.t.p.}$$

De acuerdo a lo anterior, si $f\mathcal{R}g$ entonces $\displaystyle\int f = \int g$. Por abuso de notación llamamos $L^1(d\mu)$ también al espacio cociente $L^1(d\mu)/\mathcal{R}$. Entonces se tiene:

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio métrico**, con la métrica dada por:

$$d(f, g) = \int |f - g| d\mu, \quad f, g \in L^1(d\mu).$$

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio normado**, con la norma dada por:

$$\|f\| = \int |f| d\mu, \quad f \in L^1(d\mu).$$

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio de Banach**, es decir, toda sucesión de Cauchy de elementos de $L^1(d\mu)$ es convergente a un elemento de $L^1(d\mu)$.

2.12. Teorema de la Convergencia Dominada

TEOREMA 2.10 *En $(X, \mathcal{A}, \mu)$, espacio de medida, si la sucesión de funciones medibles $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función $f(x)$ y además $|f_n(x)| \leq F(x)$ $\forall n$, $\forall x$ con F medible, positiva y tal que $\int_X F(x)d\mu < \infty$, entonces $f(x)$ es integrable y se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0. \tag{2.3}$$

En particular,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu = \int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x)d\mu\right). \tag{2.4}$$

Demostración (del TCD):

El que f sea integrable es inmediato porque $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ implica $|f(x)| \leq F(x)$, $\forall x$ también y F es integrable (finita). Veamos también que (1) $\Rightarrow$ (2):

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu\right| = \left|\int_X (f_n(x) - f(x)d\mu)\right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \overset{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

y esto implica (2).

Sólo necesitamos probar (1). Veamos que es una consecuencia del Lema de Fatou:

Sean $h_n = 2F(x) - |f_n(x) - f(x)|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces $h_n \geq 0$ y $\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 2F(x)$. Por Fatou deducimos:

$$\int_X 2F(x)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2F(x)d\mu - \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu\right) =$$

$$= \int_X 2F(x)d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu.$$

Despejando queda

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \leq 0,$$

y, por tanto, lo anterior debe ser igual a 0. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu = 0.$$

Q.E.D.

Observación: En el Teorema de convergencia dominada, en el caso cuando μ es completa, se puede pedir que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ en casi todo punto x.

COROLARIO 2.11 *: Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, son medibles y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int |f_k(x)|d\mu < \infty$, entonces la serie $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge en c.t.p. y*

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_X f_k(x)d\mu\right).$$

Demostración:

Si $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$, aplicamos el TCM para deducir que $\displaystyle\int_X F < \infty$ y, por tanto, $F(x) < \infty$ c.t.p. A continuación usamos el TCD sobre las sumas parciales de la serie.

Q.E.D.

2.13. ANEXO I: Sobre las funciones simples y su integral

Algunos libros exigen en la definición de función simple la condición adicional de que los conjuntos que la definen sean todos de medida finita. Para aclarar este punto y como motivación general, vamos a estudiar la siguiente situación en cierta forma "patológica":

- Sea X un conjunto con más de un elemento y elijamos $A \in \mathcal{P}(X)$, con $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$.

  Definimos la σ-álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ y la medida $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ por $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A^c) = 1$, $\mu(A) = \mu(X) = \infty$.

  Sea $f = \chi_A$. Con la condición adicional, f no sería simple porque $\mu(A) = \infty$. Además la única función simple s con $0 \leq s \leq f$ sería $s = c\chi_{\emptyset}$, por lo que $\int s d\mu = 0$ y por tanto $\int f d\mu = \sup\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f\} = 0$ **.** Esto crea el problema de desasociar la noción de integral con la de medida.

Lo cierto es que si la medida μ fuera **σ-finita** esta situación no se daría porque si $\exists X_1, X_2,\ldots,X_n,\ldots$ tales que

1. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (podemos suponer que la unión es disjunta)
2. $\mu(X_n) < \infty$,

entonces $\forall A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = \infty$ se tiene incluso en esta situación más restrictiva $\int \chi_A d\mu = \infty$.

Para probarlo, sean $A_n = A \cap X_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ y $s_n = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}$, entonces cada s_n es simple en el sentido actual (porque $\mu(A_j) < \infty$) y $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_n \leq \ldots \longrightarrow \chi_A$, por tanto

$$\int_X \chi_A d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu(A) = \infty.$$

Q.E.D.

Aún admitiendo que las medidas σ-finitas son las que con más frecuencia aparecen, no debemos olvidar el caso, entre otros, de la medida de contar en un espacio no numerable que claramente no es σ-finita. Por ello, y para evitar la patología descrita, es conveniente dar la definición de función simple e integral que hemos introducido anteriormente.

Ya hemos visto que toda función medible y positiva tiene asociada en principio una integral. La clase más importante es de todas formas aquella de las funciones cuya integral es además finita.

2.14. La integral de Lebesgue, un esquema