Teoría de la Integral y de la Medida

Universidad Autónoma de Madrid

Figura 1: Henri Lebesgue

Curso 2017/2018
Fernando Soria
(con algunas correcciones de Dmitry Yakubóvich y de Fernando Quirós en 2020 – 2022)

Índice general

Capítulo 1

Introducción

1.1. La integral hasta 1900 - la integral de Riemann

DEFINICIÓN 1.1 *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada y sea* $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ *una partición del intervalo* $[a,b]$*. Sea* $I_j = [x_{j-1}, x_j]$*,* $j = 1, 2, \ldots$ *y sean tambien* $s_j = \sup_{I_j} f(x)$ *y* $i_j = \inf_{I_j} f(x)$*.*

Definimos las sumas superior e inferior como

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} s_j\,(x_j - x_{j-1})$$

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} i_j\,(x_j - x_{j-1})$$

Decimos entonces que f *es integrable* **en el sentido de Riemann** *si existen particiones que permitan aproximar las sumas anteriores de forma arbitraria.*

TEOREMA 1.1 *Toda función* f *continua definida en un intervalo cerrado es integrable en el sentido de Riemann. Lo mismo es cierto si* f *es acotada y tiene solo un número finito de discontinuidades.*

Ejemplo

Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Consideramos la partición $\mathcal{P} = \{x_j = \frac{j}{n}$, con $j = 0, 1, \ldots n\}$. Entonces

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$$

De esta forma se tiene que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) - \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, lo que implica que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

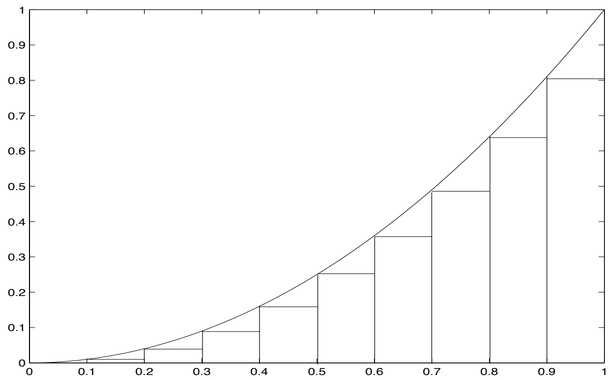


Figura 1.1: Suma inferior para la función x^2. En este caso $n = 10$

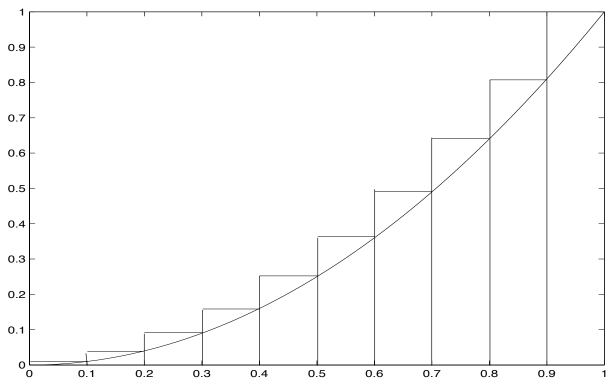


Figura 1.2: Suma superior para la función x^2. En este caso $n = 10$

Damos a continuación un ejemplo de función no integrable Riemann (la función de Dirichlet):

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2n} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Esto es debido a que $\forall \mathcal{P}$ particion se tiene que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = 1$ y que $\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = 0$. Con lo que no es cierto que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) - \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Observación Es fácil ver que la función

$$f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2n},$$

es igual a cero salvo en un número finito de puntos. Por tanto es integrable en el sentido de Riemann y se tiene $\displaystyle\int f_m(x)\,dx = 0, \quad \forall m$. En particular

$$\lim_{m\to\infty} \int f_m(x)\,dx = 0.$$

Antes de desarrollar su teoría, Lebesgue demostró el siguiente resultado de caracterización de funciones que son integrables en el sentido de Riemann:

TEOREMA 1.2 (de Lebesgue) *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- *f es integrable en el sentido de Riemann*
- *El conjunto de discontinuidades de f, es decir, $\mathcal{D}_f = \{x \in [a,b] : f \text{ no es continua en } x\}$ verifica la propiedad de que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar un cubrimiento numerable de $\mathcal{D}_f$ por intervalos abiertos $\{(a_j, b_j\}_{j\geq 1}$ que cumple*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) < \varepsilon. \tag{1.1}$$

(Los conjuntos con esta propiedad se denominan de medida cero).

1.2. La cuerda vibrante (método de Fourier))

Queremos encontrar $u(x,t)$ que verifique

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Ecuación de Ondas)
- $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $\forall t$;
- $u(x,0) = f(x)$, $\forall x$; (dato inicial).

Observamos que $u_n(x,t) = \cos(\omega n t)\,\mathrm{sen}\,(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, son soluciones simples de la EDP y, por ser la EDP lineal, cualquier combinación lineal de éstas,

$$u_N(x,t) = \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\omega n t)\,\mathrm{sen}\,(nx), \quad \text{con} \quad a_n \in \mathbb{R}\,, \mathbb{C},$$

también es solución. Para que $u_N(x,t)$ verificase las condiciones iniciales y de contorno, se debería tener

$$\sum_{n=1}^{N} a_n\,\mathrm{sen}\,(nx) = f(x),$$

lo cual no es cierto en general (entre otras cosas porque la parte izquierda es una función analítica). Supongamos que tenemos en su lugar una serie infinita.

La idea de Fourier es la siguiente: como "toda"función π-peródica f se puede escribir en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx),$$

para ciertos "números" $\{a_n\}_n$, entonces

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega n t)\, \operatorname{sen}(nx),$$

es la solución a la ecuación de ondas dada.

Nos preguntamos cómo serían los a_n para que esto fuera posible. Para ello debemos fijarnos en que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, \operatorname{sen}(mx)\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Entonces, si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$, se tiene formalmente que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x)\, \operatorname{sen}(mx)\, dx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \right) \operatorname{sen}(mx)\, dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx)\, \operatorname{sen}(mx)\, dx = a_m \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos una fórmula para los a_n [1]:

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, \operatorname{sen}(nx)\, dx.}$$

El problema es que para llegar a este resultado, hemos integrado término a término una serie infinita, y eso hay que justificarlo. Si la suma fuera finita, no habría problema. Luego se trata de determinar cuándo es cierto que

$$\int_0^{\pi} \lim_{N\to\infty} f_N(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} f_N(x)\, dx.$$

[1] a estos valores se les denomina "coeficientes de Fourier"de f y a la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$, "suma de Fourier"de f

1.3. Diferenciación y la integral de Lebesgue

Uno de los logros del Cálculo diferencial e integral es el denominado *T.F.C.* (Teorema Fundamental del Cálculo):

TEOREMA 1.3 (T. FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) *Sea f continua y definamos $F(x) = \int_0^x f(y)\,dy$. Entonces F es derivable y además $F'(x) = f(x)$, $\forall x$.*

Esto nos permite calcular primitivas para la función f. En general, si sabemos que G es una primitiva de f (i.e. $G' = f$), entonces

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Por definicion de límite, lo que el T.F.C. dice es que

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)\,dy,$$

Pero, ¿podemos esperar que el límite de la derecha exista, incluso si f no es continua, y coincida además con el valor de f en x? La respuesta viene dada por el hecho de que el límite sí coincide con $f(x)$ en **casi todo punto**, en un sentido que precisaremos más adelante.

A las preguntas planteadas en esta introduccion daremos respuesta con teoremas importantes que permiten obtener resultados de gran utilidad en otras áreas de las matemáticas como la Probabilidad, la resolución de EDPs o el Análisis Funcional.

Además veremos que cualquier teoría de la medida da lugar de forma natural a una teoría de la integral. Y es que INTEGRAR es MEDIR ... y RECÍPROCAMENTE !!

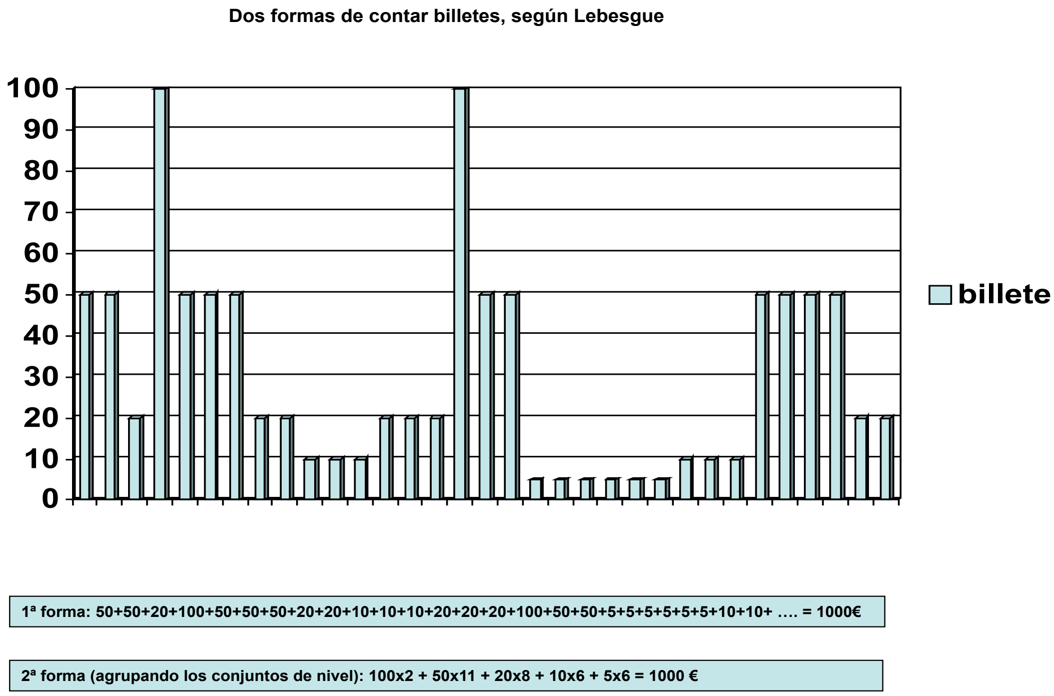
1.4. La integral según Lebesgue

"Hay dos formas de contar el dinero en billetes:

1. sumando su valor directamente según van apareciendo
2. agrupándolos por denominación y sumando al final cada uno de estos grupos"

Aquí la función f que da el valor de cada billete es escalonada. Para una función arbitraria (de momento positiva)

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),$$



dado $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos de nivel

$$E_{k,\varepsilon} = \{x \in D : k\varepsilon < f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}.$$

Supongamos que conocemos la "longitud"de cada $E_{k,\varepsilon}$. Entonces una aproximación por exceso del área encerrada por f viene dada por

$$A_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varepsilon \operatorname{long}(E_{k,\varepsilon}),$$

mientras que por defecto viene dada por

$$B_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon \operatorname{long}(E_{k,\varepsilon}).$$

(Ver figura)

La función f será integrable en el sentido de Lebesgue cuando al hacer $\varepsilon \to 0^+$ ambas aproximaciones coincidan. Obsérvese que $A_\varepsilon \geq B_\varepsilon$ y

$$A_\varepsilon - B_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{long}(\{x \in D : \varepsilon < f(x)\}),$$

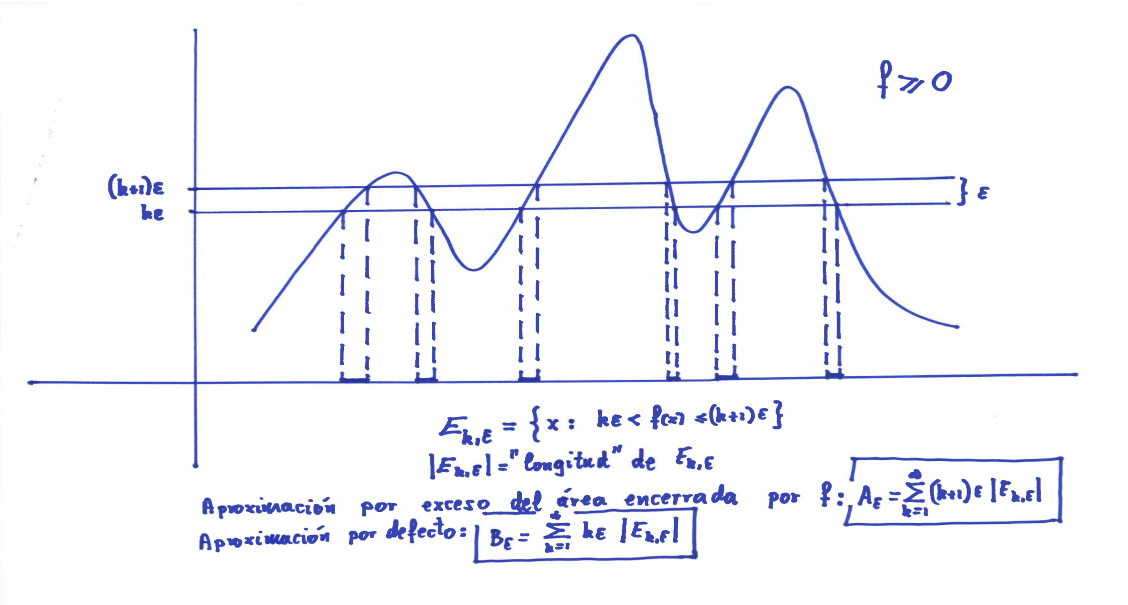


Figura 1.3: Esquema de las aproximaciones a la integral de Lebesgue

si al menos uno de los conjuntos es finito. La función podría no ser acotada.

$\boxed{\text{Ejemplo:}}$ $f : (0,1) \to [0,\infty), \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- El método descrito reduce la cuestión a determinar apropiadamente qué se entiende por longitud de un conjunto arbitrario.
- Este es el primer gran concepto de la integral de Lebesgue:
  Para integrar funciones es necesario "medir"primero conjuntos.

$\boxed{\text{Ejemplo:}}$ El conjunto (ternario) de Cantor (ver figura).

1.5. El conjunto (ternario) de Cantor

- Los intervalos $\{I_{n,k}\}$, con $n = 1, \ldots, \infty$ y $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$, son abiertos y disjuntos
- Los intervalos $\{J_{n,k}\}$, con $n = 1, \ldots, \infty$ y $k = 1, \ldots, 2^{n}$, son cerrados
- En cada paso retiramos $1/3$ (el tercio central) de cada intervalo $J_{n,k}$ ya construido
- Cada Intervalo $J_{n,k}$ es "padre"de dos intervalos de la clase J del paso $n+1$
- La longitud de cada intervalo $I_{n,k}$ y $J_{n,k}$ construido en el paso n es igual a 3^{-n}

Hay dos formas de calcular la "longitud"[2] del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

[2] a partir de ahora la llamaremos medida, y para un conjunto A escribiremos $\mathrm{med}(A)$.

PRIMEROS PASOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE CANTOR

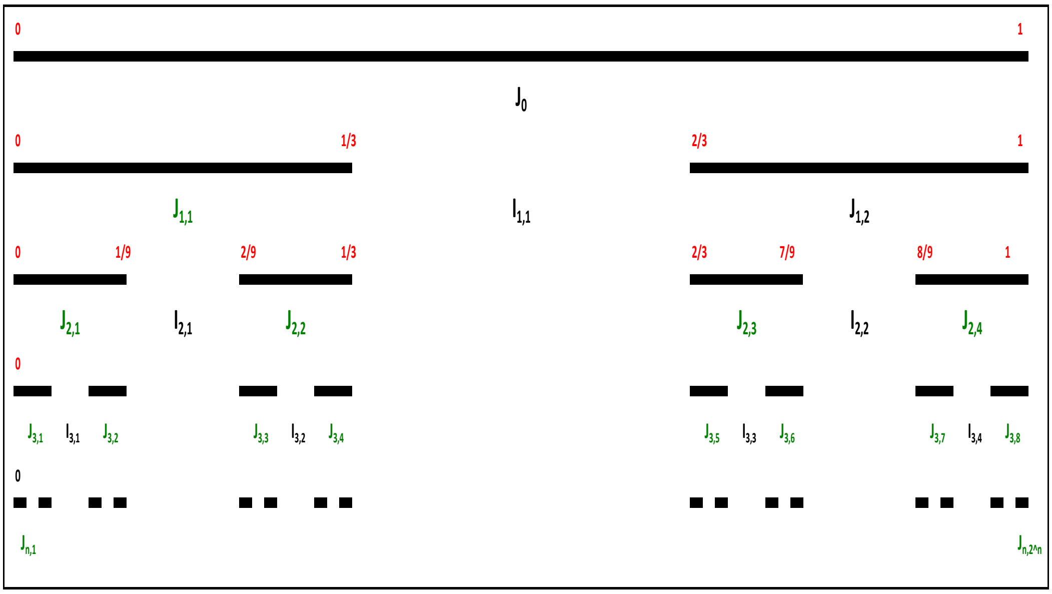


Figura 1.4: $[0,1] = \mathcal{O} \cup \mathcal{C}$, donde $\mathcal{O} = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$ y $\mathcal{C} = \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n}} J_{n,k}$

- Por un lado podemos calcular la medida del abierto $\mathcal{O}$ que es la unión disjunta de todos los intervalos abiertos $\{I_{n,k}\}$:

$$\text{med}(\mathcal{O}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \text{long }(I_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1/3}{1-2/3} = 1.$$

  Como $\mathcal{O}$ y $\mathcal{C}$ son disjuntos, se debe tener

$$\text{med}(\mathcal{O}) + \text{med}(\mathcal{C}) = \text{med}([0,1]) = 1, \quad \text{luego} \quad \text{med}(\mathcal{C}) = 0.$$

- Por otro, si llamamos $\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, se tiene $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n, \forall n$, y por tanto

$$\text{med }(\mathcal{C}) \leq \text{med }(\mathcal{C}_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \text{med}(J_{n,k}) = \frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0, \quad \text{si } n \to \infty.$$

  De nuevo se concluye $\text{med}(\mathcal{C}) = 0$.

Algunas propiedades del conjunto ternario de Cantor:

- $\mathcal{C}$ es un **conjunto perfecto**, es decir
  - es cerrado
  - coincide con todos sus **puntos de acumulación** (i.e., no tiene puntos aislados)
- $\mathcal{C}$ es **compacto** (cerrado y acotado)
- $\mathcal{C}$ es **totalmente desconexo** (i.e., dados dos puntos cualesquiera de $\mathcal{C}$ el segmento que los une no está en $\mathcal{C}$)
- El conjunto de Cantor se puede caracterizar a partir de la descomposición en base 3 de todo número de $[0,1]$ como

$$\mathcal{C} = \{x \in [0,1] : x = \sum_{k\geq 1} \frac{a_k}{3^k}, \text{ con } a_k = 0, 2\}.$$

- $\mathcal{C}$ tiene el **cardinal del continuo** (en realidad todo conjunto perfecto de la recta real es no numerable). La siguiente aplicación es biyectiva (!):

$$\varphi : [0,1] \to \mathcal{C}; \text{ si } x = \sum_{k\geq 1} \frac{b_k}{2^k}, b_k = 0, 1, \text{ entonces } \varphi(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{2b_k}{3^k}.$$

  (Paso de base 2 a base 3).

- **... además, como hemos visto, el conjunto ternario de Cantor tiene medida 0**.

- Dirichlet conjeturó que todo conjunto cerrado totalmente desconexo debería tener medida cero.

Sin embargo, se pueden construir conjuntos de Cantor similares al ternario pero que NO tengan medida cero:

Conjuntos de Cantor generalizados

El proceso es similar:

- Se elige un valor $0 < \alpha < 1/3$. En el primer paso se elimina el intervalo abierto central, $I^\alpha_{1,1}$ de longitud α. A los dos intervalos restantes, $J^\alpha_{1,k}, k = 1, 2$, se les quita los intervalos centrales $I^\alpha_{2,k}, k = 1, 2$, de longitud α^2. Quedan ahora cuatro intervalos cerrados $J^\alpha_{2,k}, k = 1, 2, 3, 4$, de los que se eliminan los intervalos centrales $I^\alpha_{3,k}, k = 1, 2, \ldots, 8$, de longitud α^3 y se continua el proceso por inducción.

- El conjunto de Cantor de orden α viene definido por la expresión

$$\mathcal{C}^\alpha = [0,1] \setminus \mathcal{O}^\alpha, \quad \text{donde} \quad \mathcal{O}^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I^\alpha_{n,k}; \quad \left(\mathcal{C}^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J^\alpha_{n,k} \right).$$

- Como

$$\text{med}(\mathcal{O}^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \text{long } (I^\alpha_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\alpha^n = \frac{\alpha}{1-2\alpha},$$

obtenemos

$$\text{med}(\mathcal{C}^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{1-2\alpha} = \frac{1-3\alpha}{1-2\alpha}.$$

Este valor es estrictamente positivo si $\alpha < 1/3$, lo cual coincide con la condición impuesta.

- Es fácil ver también que

$$\text{med}(\mathcal{C}^\alpha) = \lim_{n\to\infty} \text{med}(\mathcal{C}^\alpha_n), \quad \text{donde} \quad \mathcal{C}^\alpha_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J^\alpha_{n,k}.$$

1.6. Una primera definición de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$

A la vista de lo anterior, nos aventuramos a hacer la siguiente

DEFINICIÓN 1.2 *Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se define su "medida"de Lebesgue como*

$$med(A) = \inf \left\{ \sum_{k\geq 1} long\ (I_k), \ \ con\ \{I_k\}\ intervalos,\ y\ \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A \right\}.$$

En particular se tiene

LEMA 1.4 *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene "medida"de Lebesgue cero si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \{I_k\}\ sucesión\ de\ intervalos,\ con\ \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A,\ tal\ que\ \sum_{k\geq 1} long\ (I_k) < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.3 *Una determinada propiedad $\mathcal{P}$ se dice que se cumple en casi todo punto (c.t.p.) si el conjunto de puntos donde NO se cumple $\mathcal{P}$ tiene medida cero.*

Propiedades de la "medida"de Lebesgue en $\mathbb{R}$

1. $\text{med}(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subset B$ entonces $\text{med}(A) \leq \text{med}(B)$.

3. Dada una familia numerable de subconconjuntos, $\{A_k\}_k$, entonces

$$\text{med}\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} \text{med}(A_k).$$

Además,

- La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.

LEMA 1.5 *Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces med$(I) =$ long(I).*
(La demostración utiliza propiedades topológicas muy finas ...)

Conjuntos no medibles para la "medida"de Lebesgue
La propiedad 3 anterior no es totalmente satisfactoria. Nos gustaría que si la familia de conjuntos $\{A_k\}_k$ fuera disjunta, entonces, se tuviera la igualdad:

$$\text{med}\left(\biguplus_{k\geq 1} A_k\right) = \sum_{k\geq 1} \text{med}(A_k), \quad \text{(numerablemente aditiva)}.$$

Además, para que recoja las propiedades habituales de los movimientos rígidos, debería cumplirse que la medida no cambiará si realizamos una traslación (o rotación). En particular,

$$\text{med}(x + A) = \text{med}(A), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \subset \mathbb{R}.$$

El problema es que, con estas condiciones no todo todo conjunto es medible.

$\boxed{\text{Contraejemplo:}}$
En $[0, 1]$ definimos la relación de equivalencia $x\mathcal{R}y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sea A^* el conjunto formado por un elemento de cada clase de equivalencia (axioma de elección). Entonces A^* "no se puede medir".

1.7. Medida exterior

DEFINICIÓN 1.4 *La función sobre conjuntos definida anteriormente se denomina medida exterior para la medida de Lebesgue y se denota por m^*; es decir, $\forall A \subset \mathbb{R}$,*

$$m^*(A) = \text{ínf}\left\{\sum_{k\geq 1} \textit{long } (I_k), \ \textit{con } \{I_k\} \textit{ intervalos, y } \bigcup_{k\geq 1} I_k \supset A\right\}.$$

Según veremos posteriormente, existe una clase de subconjuntos, que denominaremos medibles, sobre los cuales m^* será numerablemente aditiva.

Lebesgue definió los subconjuntos medibles de $[0, 1]$ de la siguiente forma

DEFINICIÓN 1.5 $A \subset [0, 1]$ *es medible si* $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$. *($\mathcal{C}A = [0, 1] \setminus A$)*

- NOTA: como siempre se tiene $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) \geq 1$ (por la propiedad 3), basta con exigir $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) \leq 1$ para que A se medible.

$\boxed{\text{Ejercicio}}$: Probar que, con esta definición, todo subconjunto de $[0, 1]$ de medida cero es medible.

1.8. A modo de RESUMEN

Los aspectos fundamentales que hemos resaltado en esta introducción a la Teoría de la Integral de Lebesgue son:

- La integración de funciones se puede obtener a partir de un desarrollo apropiado de una teoría de medir conjuntos.

- Esta teoría proporciona inicialmente una aproximación a la medida de "cualquier" conjunto, a través de la medida exterior de Lebesgue,

- Aunque existen conjuntos que **no** pueden ser medidos, . . . sí permite analizar conjuntos "extraños"de medida pequeña, como el conjunto de Cantor.

- El que no todos los conjuntos sean medibles nos obliga a restringir la teoría de la medida a clases de conjuntos que sean cerradas por uniones, intersecciones y complementarios (álgebras, σ-álgebras).

- La Teoría de Lebesgue permite en condiciones muy generales el intercambio del orden de funcionales límites (sumas, integrales, Fubini, etc) a través de teoremas intrínsicos (TCM, Fatou, TCD).

- Existe una Teoría de Diferenciación que extiende el conocido Teorema Fundamental del Cálculo y que se puede usar no solo sobre funciones sino también sobre medidas (Teorema de Radon-Nikodym)

Capítulo 2

Teoría de la medida y de la integral de Lebesgue

En la introducción nos hemos referido siempre, por cuestiones históricas, a la medida original de Lebesgue (es decir, a la que asigna a un intervalo de la recta $I = [a,b]; [a,b); (a,b]; (a,b)$, su longitud $|I| = b - a$).

Sin embargo, la teoría de Lebesgue se extiende de una forma natural y sencilla a casos más generales. Primero consideramos la estructura de la clase de conjuntos que vamos a medir, (*y que eventualmente llamaremos medibles*).

DEFINICIÓN 2.1 *Dado un conjunto X (en general $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, [0,1], \dots$), se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es* **σ-álgebra** *si verifica:*

1. *$X \in \mathcal{A}$.*
2. *$\mathcal{A}$ es cerrada por complementación, esto es $\quad A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{A}$.*
3. *$\mathcal{A}$ es cerrada por uniones numerables, finitas o no, esto es*

$$A_n \in \mathcal{A} \Longrightarrow \bigcup_{n\geq 1} A_n \in \mathcal{A}.$$

NOTAS:

- (2) y (3) nos dicen que $\mathcal{A}$ es cerrada por intersecciones, porque

$$\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \left(\bigcup_{n\geq 1} A_n^c\right)^c.$$

- $\mathcal{A}$ es cerrada por diferencias, porque

$$A, B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

- (1) Se podría sustituir por la afirmación de que $\mathcal{A}$ es no vacía, pues basta que exista $A \in \mathcal{A}$ para concluir por las dos notas anteriores que $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$

- Si en la definición, nos limitamos a exigir sólo que la unión finita de conjuntos está en $\mathcal{A}$, entonces se dice que $\mathcal{A}$ es una **álgebra**.
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ es siempre una σ-álgebra.

LEMA 2.1 *Si $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{D}}$ es una colección arbitraria de σ-álgebras, entonces $\bigcap_{\alpha\in\mathcal{D}} \mathcal{A}_\alpha$ es una σ-álgebra.*

Demostración: Ejercicio

Este Lema nos permite hablar para una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ de la **σ-álgebra generada por $\mathcal{B}$** como la intersección de todas las σ-álgebras que contienen a $\mathcal{B}$.

Ejemplo: En $\mathbb{R}$ se define la **σ-álgebra de Borel**, $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ como aquella generada por los intervalos abiertos

$$\{(a,b): \quad a,b \in \mathbb{R}, \quad a<b\}\,.$$

Ejercicio: Probar que $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ coincide con la generada por los intervalos cerrados $\{[a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$, o por los semiabiertos $\{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$, o $\{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a<b\}$ o por las semirectas $\{[a,\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ o $\{(\infty,b]) : b \in \mathbb{R}\}$...

2.1. Funciones medibles Lebesgue

A continuación pasamos a describir las funciones que vamos a integrar

DEFINICIÓN 2.2 *Diremos que $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible (o medible respecto a la σ-álgebra $\mathcal{A}$) si $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$f^{-1}\left((a,\infty)\right) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Muchas veces va a resultar ventajoso trabajar con funciones de X al *eje real extendido*

$$\bar{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\} = [-\infty, +\infty].$$

Definimos las operaciones aritméticas sobre este conjunto de la misma forma que se hizo en el Cálculo I en el tema de operaciones con los límites (de forma que, por ejemplo, $-\infty + 7 = -\infty$, mientras que $-\infty + (+\infty)$ y $(+\infty)/(+\infty)$ no están definidos).

DEFINICIÓN 2.3 *Sea $f : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ una función con valores en el eje real extendido. Diremos que f es $\mathcal{A}$-medible (o medible respecto a la σ-álgebra $\mathcal{A}$) si $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene*

$$f^{-1}\left((a,+\infty]\right) = \{x \in X : f(x) \in [a,+\infty]\} \in \mathcal{A}.$$

Es fácil ver que si f es $\mathcal{A}$-medible, entonces los conjuntos $f^{-1}(\{+\infty\})$ y $f^{-1}(\{-\infty\})$ son medibles (es decir, son elementos de $\mathcal{A}$).

LEMA 2.2 *Dada $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-medible, la familia*

$$\mathcal{A}_f = \{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

es una σ-álgebra en $\mathbb{R}$. En consecuencia, contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (σ-álgebra de Borel) porque $(a, \infty) \in \mathcal{A}_f$, $\forall a$, por definición.

En particular, la definición de función medible es equivalente a pedir

- $\{x : f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall b.$
- $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a.$
- $\{x : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall b.$
- $\{x : a < f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a, b.$
- La imagen inversa de todo abierto (o cerrado, o Borel) es $\mathcal{A}$-medible.

Finalmente, damos la definición abstracta de medida:

DEFINICIÓN 2.4 *Dada una σ-álgebra $\mathcal{A}$ en X. Se dice que $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty]$ es una* **medida** *sobre $\mathcal{A}$ si :*

1. $\mu(\emptyset) = 0.$

2. *Para toda familia numerable $\{A_j\}_{j\geq 1}$de $\mathcal{A}$ cuyos elementos son disjuntos dos a dos, se tiene*

$$\mu\left(\biguplus_{j\geq 1} A_j\right) = \sum_{j\geq 1} \mu(A_j).$$

Ejemplos:

1. En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$. Definimos para $A \subset \mathbb{R}$,

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, \text{ si } x_0 \in A \\ 0, \text{ si } x_0 \notin A, \end{cases}$$

entonces δ_{x_0} (Delta de Dirac en x_0) es una medida.

2. En $\mathbb{R}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definimos

$$\mu(A) = \begin{cases} card(A), \text{ si } card(A) < \infty, \\ \infty, \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, μ es una medida.

3. En $\mathbb{Z}$ sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Definimos para $A \subset \mathbb{Z}$, $\mu(A) = \displaystyle\sum_{n\in A} \frac{1}{1 + |n|}$;

entonces, μ es una medida.

4. En $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sean $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \lambda > 0$ y $\mu_\lambda(A) = e^{-\lambda} \sum_{n \in A} \frac{\lambda^n}{n!}$, para cada $A \in \mathcal{A}$. Entonces, μ_λ es una medida. (Medida de probabilidad asociada a la distribución de Poisson de índice λ).

2.2. Espacios de medida

DEFINICIÓN 2.5 *Llamaremos* **espacio de medida** *a toda terna* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *compuesta por un conjunto* X*, una* σ*-álgebra* $\mathcal{A}$ *de* $\mathcal{P}(X)$*, y una medida* μ *definida sobre* $\mathcal{A}$*. Diremos que la medida* μ *sobre* $\mathcal{A}$ *es* **finita** *si* $\mu(X) < \infty$ *y que es* **σ-finita** *si podemos escribir* $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$*, con* $X_n \in \mathcal{A}$*,* $n = 1, 2, 3, ...$*, y* $\mu(X_n) < \infty$*.*

En los ejemplos anteriores, las medidas de (1) y (4) son finitas, la de (3) es σ-finita pero no finita y la de (2) no es siquiera σ-finita.

Ejercicios:

1. Si $f, g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ son medibles, probar que las funciones $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son medibles.

2. Probar que el supremo y el ínfimo de una familia numerable de funciones medibles, es medible. *Indicación*: $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$; (obsérvese la nueva notación).

3. Deducir que el lím sup, lím ínf y lím de funciones medibles son todos medibles

4. Supongamos que $f, g : X \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ son medibles y $f + g$ está bien definida, es decir, la expresión $f(x) + g(x)$ nunca toma la forma $-\infty + (+\infty)$ o $+\infty + (-\infty)$. Probar que la suma $f + g$ es medible.

   Indicación:
   $$\{f + g > a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g > a - q\})\,.$$

5. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, probar que la composición $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.

Primer resultado de monotonía para conjuntos

PROPOSICIÓN 2.3 *Sea μ una medida sobre la σ-álgebra $\mathcal{A}$; se tienen los siguientes resultados:*

1. *Si $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además si $\mu(A) < \infty$, se tiene que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

2. *Si $A_1 \subset ... \subset A_n \subset A_{n+1}...$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, entonces $\mu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j)$.*

3. *Si $A_1 \supset \cdots \supset A_n \supset A_{n+1}...$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, y $\mu(A_1) < \infty$, entonces*
   $$\mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \lim_{j\to\infty} \mu(A_j).$$

Un ejemplo de por qué la condición $\mu(A_1) < \infty$ de 3 es necesaria: en el ejemplo 3 de páginas anteriores, sean $A_m = \{m, m+1, m+2, ...\}$ con $m = 1, 2, 3, ...$, entonces $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \emptyset$ pero $\lim_{m\to\infty} \mu(A_m) = \infty$ (porque de hecho $\mu(A_m) = \infty$, $\forall m$) .

2.3. Integración de funciones medibles positivas

Durante todo el curso, emplearemos el término "función positiva" en el sentido de "función no negativa".

DEFINICIÓN 2.6 *Dado un conjunto A, se define la función característica o indicatriz de A como:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in A \\ 0, & si\ x \notin A. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 2.7 *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ (X conjunto, $\mathcal{A}$ σ-álgebra, μ medida) se dice que $s : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función simple si se puede escribir como una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos de $\mathcal{A}$. Es decir* $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \qquad con\ c_j \in \mathbb{R},\ A_j \in \mathcal{A}, \quad j = 1, 2, 3, ..., n.$

- Por un reordenamiento de las constantes c_j, se puede suponer siempre que los A_j son disjuntos.

- Una función es simple si y solo si es medible y su rango está compuesto por un número finito de valores.

DEFINICIÓN 2.8

- *Para una función simple*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{A_j}(x), \tag{2.1}$$

se define su integral como sigue:

$$\int_X s(x) d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j \mu(A_j),$$

siempre que bien $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j = 1, 2, \ldots n$, o bien los c_j sean positivos, en cuyo caso no importa que los A_j sean de medida finita o no.

El valor de la integral va a ser el mismo si pasamos de la representación de $s(x)$ a otra, $s(x) = \sum_{j=1}^{n'} c'_j \chi_{A'_j}(x)$ donde los conjuntos A'_j son disjuntos. Se puede deducir que la definición de la integral $\int_X s\, d\mu$ no depende de la elección de los conjuntos A_j en la representación de s.

- *Para una función $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ medible con $f(x) \geq 0$, $\forall x$, se define su integral como sigue:*

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X s(x) d\mu : 0 \leq s(x) \leq f(x);\ s(x) simple \right\}.$$

  - *El supremo en esta definición podría valer $+\infty$. Esto sucede, en particular, si f toma valor $+\infty$ en un conjunto de medida positiva.*

Ejemplos

1. Si μ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y f es la función de Dirichlet, entonces f es simple, $f = \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu = 0$

2. Si δ_{x_0} es la medida "Delta de Dirac en x_0", entonces toda función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y si $f \geq 0$, se tiene $\displaystyle\int f\delta_{x_0} = f(x_0)$

3. En general, si μ es la medida de contar sobre $\mathbb{Z}$, entonces $\displaystyle\int f d\mu = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(m)$.

4. Si μ es la medida del ejemplo 3 inicial y definimos $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(m) = \frac{1+|m|}{|m|^2}$, con $m \neq 0$ y $f(0) = 0$, entonces $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}} f d\mu = \frac{\pi^2}{3}$.

Observaciones:

1. Es fácil ver que si u y v son funciones simples, $u + v$ es simple y
$$\int (u+v)d\mu = \int u\,d\mu + \int v\,d\mu.$$

2. También, si f y g son medibles y $0 \leq g \leq f$ se tiene $\displaystyle\int g\,d\mu \leq \int f\,d\mu$.

2.4. Teorema de la Convergencia Monótona

Ejercicio importante: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j\chi_{A_j}$ es una función simple positiva, entonces la función $\nu : \mathcal{A} \to [0,\infty]$ dada por
$$\nu(A) = \int_A s d\mu = \int_X s\chi_A d\mu,$$
define una medida sobre $\mathcal{A}$. Escribiremos $d\nu = s\,d\mu$. Diremos que s es la función densidad (o función derivada) de ν con respecto a μ.

TEOREMA 2.4 (de la convergencia monótona) *Si $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles positivas ($0 \leq f_1 \leq ... \leq f_n \leq f_{n+1} \leq ... \leq +\infty$) y sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces se tiene*
$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu = \int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n(x)\,d\mu\right).$$

Aquí se permite que tanto las funciones f_n como la función f tomen el valor $+\infty$.

Demostración:

Observemos primero que $\displaystyle\int f_1 \leq \int f_2 \leq \int f_3 \leq ... \leq \int f_n \leq ...$, así que el límite de las integrales siempre existe (aunque podría valer $+\infty$). Además si $f_n \leq f$, entonces $\int f_n \leq \int f$ por lo que se tiene

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu,$$

Veamos la otra desigualdad, para ello seleccionamos una función simple arbitraria entre las que cumplen $0 \leq s(x) \leq f(x)$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$ (podemos imaginar "α"próximo a 1) definimos para cada n

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}.$$

Es fácil ver:

1. A_n es medible, (porque $A_n = (f_n - \alpha s)^{-1}([0, \infty]))$. (Nótese que la función s solo toma valores finitos)

2. $\{A_n\}$ es creciente ($A_1 \subset A_2 \subset ...$) y

3. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Además

$$\int_{A_n} s(x)d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left(\int_X f_n(x)d\mu\right) \leq \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu\right).$$

Usando el resultado de monotonía para conjuntos con respecto a la medida $\nu = s(x)d\mu$ obtenemos

$$\int_X s(x)d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_{A_n} s(x)d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu\right).$$

Tomando el supremo sobre las funciones simples $s(x)$, con $0 \leq s(x) \leq f(x)$ queda

$$\int_X f(x)d\mu \leq \frac{1}{\alpha}\left(\lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu\right).$$

Como además α es arbitrario (y próximo a 1) se deduce

$$\int_X f(x)d\mu \leq \lim_{j\to\infty}\int_X f_j(x)d\mu.$$

Q.E.D.

Un poco más tarde, deduciremos un análogo del Teorema de convergencia monótona para las series no negativas de funciones. Tenemos que probar antes la aditividad de la integral.

2.5. La aditividad de la integral para funciones no negativas

La obtendremos como una aplicación del TCM. Empezamos con la siguiente observación.

Observación: Sea $f \geq 0$ una función medible y sea $\mathcal{P} = \{0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_{N-1} < y_N = +\infty\}$ una partición del semieje $[0, +\infty]$ (entendido como el semieje y). Entonces definimos la función simple

$$f_{\mathcal{P}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} y_k, \quad \text{si } f(x) \in [y_k, y_{k+1}),\ 0 \leq k \leq N-1.$$

Para $k = N - 1$, utilizamos en esta definición el intervalo $[y_{N-1}, y_N] = [y_{N-1}, +\infty]$ en vez del intervalo $[y_{N-1}, +\infty)$.

Entonces para toda partición $\mathcal{P}'$, más fina que $\mathcal{P}$, (es decir, todo punto y_k, que pertenece a $\mathcal{P}$, pertenece también a $\mathcal{P}'$), se tiene $f_{\mathcal{P}'} \geq f_{\mathcal{P}}$.

Efectivamente, dado un $x \in X$, supongamos que $f(x) \in [y_k, y_{k+1})$. Como y_k, y_{k+1} pertenecen a $\mathcal{P}'$, $y_k = y'_m$, $y_{k+1} = y'_{m+n}$ para algunos $m, n \geq 0$. Entonces $f_{\mathcal{P}'}(x) = y'_\ell$ para algún ℓ, $m \leq \ell < m + n$, y por lo tanto, $f_{\mathcal{P}'}(x) \geq f_{\mathcal{P}}(x)$.

Necesitamos el siguiente resultado técnico que nos será de utilidad en numerosas ocasiones.

LEMA 2.5 (Lema técnico) *Sea $f : X \to [0, +\infty]$ una función medible y positiva. Entonces existe una sucesión monótona creciente de funciones simples positivas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s_{n+1} \leq ...$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall x. \tag{2.2}$$

Demostración: La idea es la original de Lebesgue. Consideramos las particiones

$$\mathcal{P}_n : \quad 0 < \frac{1}{2^n} < \frac{2}{2^n} < \ldots < \frac{n2^n}{2^n} < +\infty.$$

Está claro que la partición $\mathcal{P}_{n+1}$ es más fina que $\mathcal{P}_n$, para todo n. Poniendo $s_n = f_{\mathcal{P}_n}$, obtenemos una sucesión creciente de funciones no negativas:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \ldots.$$

Para ver (2.2), observamos que $s_n(x) \leq f(x) < s_n(x) + \frac{1}{2^n}$, si $f(x) < n$. Por tanto, si $f(x) < +\infty$, entonces $f(x) < n$, digamos, para $n \geq N_0$, y se sigue que $s_n(x) \to f(x)$ cuando $n \to \infty$. Si $f(x) = +\infty$ para algún valor de x, entonces $s_n(x) = n$ para todo n, y se obtiene también que $s_n \to f(x) = +\infty$ cuando $n \to \infty$.

Q.E.D.

Nota: Este resultado sirve además para dar otra demostración de que si f y g son medibles entonces $f+g$, $g \cdot f$, f/g (cuando esté bien definida) son medibles, por ser límites puntuales de funciones medibles.

Ejercicio: Probar que si f es medible, positiva y su integral es finita entonces $\forall a > 0$ el conjunto $A = \{x \in X : f(x) > a\}$ tiene medida finita. ¿Que ocurriría si $a = 0$?

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.6 *: Si $f, g \geq 0$ medibles, entonces:*

$$\int_X (f+g)d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Demostración:

Si $\int f = \infty$ ó $\int g = \infty$, no hay nada que probar. En caso contrario, por el lema anterior, existen sucesiones de funciones simples $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s_{n+1} \leq ... \longrightarrow f$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n \leq t_{n+1} \leq ... \longrightarrow g$.

Como $0 \leq (s_1 + t_1) \leq (s_2 + t_2) \leq ... \leq (s_n + t_n) \leq (s_{n+1} + t_{n+1}) \leq ... \longrightarrow (f + g)$, en particular $f + g$ es medible, y como el resultado que buscamos es cierto para simples, concluimos

$$\int_X (f+g) = \lim_{n\to\infty} \int_X (s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X s_n + \int_X t_n \right) = \int_X f + \int_X g$$

Q.E.D.

2.6. Convergencia monótona para series

Del TCM deducimos un resultado que era uno de los objetivos presentados en la introducción:

PROPOSICIÓN 2.7 *Sea $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces:*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x) d\mu \right).$$

(De forma análoga al TCM, se admite que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} g_n(x)$ tome el valor $+\infty$ para algunos valores de x).)

Demostración:

Definimos para cada $N = 1, 2, 3, ...$ $G_N(x) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x)$. Por definición de serie, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \lim_{N\to\infty} G_N(x)$. Además $0 \leq G_1 \leq G_2 \leq ... \leq G_n \leq ...$, por ser las g_n positivas.

Podemos escribir

$$\int G_N(x) d\mu = \sum_{n=1}^{N} \int g_n(x) d\mu.$$

Luego por el TCM

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) d\mu = \int \lim_{N\to\infty} G_N(x) d\mu = \lim_{N\to\infty} \int G_N(x) d\mu =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int g_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(x) d\mu.$$

Q.E.D.

Notación y ejercicio: Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y f es una función medible y positiva se define para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

Probar entonces que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida sobre $\mathcal{A}$. Al igual que antes, escribiremos $d\nu = f d\mu$ (ó $d\nu = d\mu_f$).

2.7. Lema de Fatou

LEMA 2.8 (Fatou) *Dada una sucesión de funciones medibles y positivas, $\{f_n\}$, se tiene:*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} (f_n(x)) \right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right).$$

Demostración: Es una consecuencia del Teorema de la Convergencia Monóntona.

Sea $g_n(x) = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, ...\}$. Entonces $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq ... \leq g_n \leq g_{n+1} \leq ...$ y $\lim_{n\to\infty} g_n = \liminf_{k\to\infty} f_k$ por definición de límite inferior. Además $g_n \leq f_n$ $\forall n$. por tanto

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} (f_n(x)) \right) d\mu = \int_X \lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x) d\mu \stackrel{TCM}{=} \lim_{n\to\infty} \int_X g_n(x) d\mu$$
$$\leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right).$$

Q.E.D.

2.8. Integral de una función medible arbitraria

Si $f : X \longrightarrow [-\infty, \infty]$ es medible, entonces se puede escribir $f = f^+ - f^-$ con f^+, f^- funciones medibles positivas ($f^+ = \max(f, 0)$; $f^- = -\min(f, 0)$).

DEFINICIÓN 2.9 *Se dice que f es integrable si $\int f^+ d\mu < \infty$ y $\int f^- d\mu < \infty$ y escribimos*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

<u>Notas</u>:

1) Si f es medible y $f = f^+ - f^-$ entonces $|f| = f^+ + f^-$ y se tiene $\int |f| = \int f^+ + \int f^-$. Por tanto, f es integrable $\Longleftrightarrow \int |f| < \infty$. Además $\left| \int f \right| \leq \int |f|$.

2) Es fácil ver que para cualquier función f integrable, solo uno de los conjuntos $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ puede tener medida positiva.

DEFINICIÓN 2.10 *Dado un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se define la clase de funciones "integrables"como*

$$L^1(d\mu) = \{f : X \to \mathbb{C} : \quad \textit{medible y tal que} \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

Propiedades de la integral

1. La clase de las funciones integrables es un espacio vectorial.
   Demostración:
   Si f y g son medibles e integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es medible (¿por que?) y además
   $$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha||f| + |\beta||g|.$$
   Luego, $\displaystyle\int |\alpha f + \beta g| < \infty$.

2. La integral es una aplicación lineal sobre la clase anterior. Es decir, si f y g son integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces
   $$\int (f+g) = \alpha \int f + \beta \int g$$
   e
   $$\int (\alpha f) = \alpha \int f.$$
   Demostración:
   La primera igualdad es cierta para funciones positivas. Si f y g son arbitrarias, denotamos $f + g = h$, luego
   $$f_+ - f_- + g_+ - g_- = h_+ - h_-, \quad \text{es decir,} \quad f_+ + g_+ + h_- = f_- + g_- + h_+.$$
   Se sigue que
   $$\int f_+ + \int g_+ + \int h_- = \int f_- + \int g_- + \int h_+,$$
   lo que se reescribe como
   $$\int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_- = \int h_+ - \int h_-, \quad \text{por tanto,} \quad \int f + \int g = \int h.$$

   Para obtener la segunda igualdad, basta considerar los casos $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y aplicar la definición de $\int (\alpha f)$.

Integración para funciones a valores complejos

DEFINICIÓN 2.11 *Si $f : X \longrightarrow \mathbb{C}$, podemos escribir $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales ($u = Re(f)$, $v = Im(f)$).*

Decimos que f es medible si u y v lo son, y que es integrable si u y v también lo son.

Escribiremos $\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu$. (en este caso, no permitiremos que f tome valores infinitos).

NOTA: Las propiedades de la integral se conservan en este contexto y además f es integrable de nuevo si y solo si $|f|$ también lo es (porque $|f| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ y $|u|, |v| \leq \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \leq |u| + |v|$).

2.9. Medidas completas

DEFINICIÓN 2.12 *Una medida μ sobre una σ-álgebra $\mathcal{A}$ se dice que es una **medida completa** si $\mathcal{A}$ contiene a todos los subconjuntos de conjuntos (de $\mathcal{A}$) con medida cero, es decir: Si $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, entonces $\forall E \subset A$, se tiene que $E \in \mathcal{A}$; obviamente se tiene además $\mu(E) = 0$.*

Las medidas que hemos visto hasta ahora son todas completas (Delta de Dirac δ_0, medida de contar en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{Z}$, etc) porque en todos los casos se tenía $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. La medida de Lebesgue, como veremos, también es completa. Hay una forma directa de completar cualquier medida como vemos en el siguiente teorema.

TEOREMA 2.9 *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, definimos:*

- $\overline{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A}$ *con* $A \subset E \subset B$ *y* $\mu(B \backslash A) = 0\}$;
- *si* $E \in \overline{\mathcal{A}}$ *con* $A \subset E \subset B$ *y* $\mu(B \setminus A) = 0$, *definimos* $\overline{\mu}(E) = \mu(A)$.

Entonces:

(i) $\overline{\mathcal{A}}$ *es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{A}$;*

(ii) $\overline{\mu}$ *es una medida completa que extiende a μ.*

Ejercicio: Probar que también se tiene:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup D : A \in \mathcal{A}\ \exists B \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(B) = 0 \text{ y } D \subset B\}$$

NOTA: Supongamos que ν es cualquier extensión de μ a una medida completa en X, definida sobre un σ-álgebra $\mathcal{A}'$, que contiene a $\mathcal{A}$. Comprobar que

(i) $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}'$ (es decir, $\overline{\mathcal{A}}$ es la σ-álgebra más pequeña, donde puede estar definida una extensión completa de μ);

(ii) $\nu(B) = \overline{\mu}(B)$ para todo conjunto B, que pertenece a $\overline{\mathcal{A}}$.

Demostración del teorema 2.9:

i) Claramente $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (porque si $A \in \mathcal{A}$, entonces (!!!) $A \subset A \subset A$ y $\mu(A \setminus A) = 0$), en particular $X \in \mathcal{A}$.
Además si $E \in \overline{\mathcal{A}}$ entonces $E^c \in \overline{\mathcal{A}}$ (porque si $A \subset E \subset B$, con $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B \setminus A) = 0$, se tiene $B^c \subset E^c \subset A^c$ y $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, por tanto $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$).

Si $E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, $i = 1, 2, ...$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, porque si $A_i \subset E_i \subset B_i$, con $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, se tiene $\cup_i A_i \subset \cup_i E_i \subset \cup_i B_i$ y $\mu(\cup_i B_i \setminus \cup_i A_i) \leq \mu(\cup_i (B_i \setminus A_i)) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0$.

ii) Para probar que $\overline{\mu}$ es una medida, veamos primero que está bien definida:

Si $A \subset E \subset B$ y $C \subset E \subset D$, con $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ y $\mu(B \setminus A) = \mu(D \setminus C) = 0$ tenemos que ver que $\mu(A) = \mu(C)$, pero esto es fácil porque $\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$ y $\mu(A \setminus C) \leq \mu(D \setminus C) = 0$, es decir, $\mu(A) = \mu(A \cap C)$ y de forma similar, $\mu(C) = \mu(A \cap C)$.

La σ-aditividad es similar a lo probado en i).

Sean $E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, disjuntos, $A_i \subset E_i \subset B_i$, con $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, se tiene

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_i)$$

(Osérvese que los A_i también son disjuntos).

Por último, $\overline{\mu}$ es completa porque si $A \in \overline{\mathcal{A}}$ es tal que $\overline{\mu}(A) = 0$ y $E \subset A$ como existen $A', B' \in \mathcal{A}$ con $A' \subset A \subset B'$ y $\mu(B' \setminus A') = 0$ y $\mu(A') = 0$, entonces $\mu(B') = \mu(A') + \mu(B' \setminus A') = 0$ también. Entonces $\emptyset \subset E \subset B'$ y se deduce que $E \in \overline{\mathcal{A}}$.

Q.E.D.

2.10. Notas sobre los conjuntos de medida cero

Recordamos que en el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se dice que una propiedad **P se cumple en casi todo punto (c.t.p.)** con respecto a la medida μ si el conjunto $A = \{x : x$ no cumple P$\}$ está en $\mathcal{A}$ y $\mu(A) = 0$.

Por ejemplo, decimos que las funciones medibles f y g coinciden en c.t.p. si $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Ejercicio: Probar que si f y g son integrables y $f = g$ c.t.p., entonces $\int f = \int g$; (por ello, en la clase de funciones integrables se suelen identificar las que coinciden c.t.p.)

El uso de las palabras "en casi todo punto" es más simple si la medida μ es completa. En este caso, para comprobar que una propiedad **P** se cumple en c.t.p., basta ver que hay un conjunto $A \subset X$ de medida 0 tal que la propiedad **P** se cumple en A^c.

Observación: Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida y sea $\bar{\mu}$ la compleción de μ. Entonces a toda función simple s respecto de $\bar{\mu}$ le corresponde una función simple $\tilde{s}$ respecto de μ, que coincide con s en casi todo punto. Esto implica la siguiente propiedad: si $f : X \to [-\infty, \infty]$ es medible respecto de μ, entonces es medible respecto de $\bar{\mu}$. Si existe la integral $\int_X f \, d\mu$ en el sentido impropio, existe también la integral $\int_X f \, d\bar{\mu}$, y son iguales. Además, f es integrable respecto de μ si y solo si es integrable respecto de $\bar{\mu}$.

Dos resultados que muestran la importancia de la completitud de una medida:
En el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ si μ es completa, entonces

1. Si $f = g$ c.t.p. y f es medible entonces g es medible. *Demostración:* Sea $D = \{x : \; f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótesis $\mu(D) = 0$. Dado $a \in \mathbb{R}$, sean $A = \{x : \; f(x) > a\}$ y $E = \{x : \; g(x) > a\}$. Sabemos que A es medible y queremos probar que E también es medible.

   Se tiene que $E \subset A \cup D$ y $A \subset E \cup D$, y por tanto

   $$B_1 = A \setminus D \quad \subset \quad E \quad \subset \quad A \cup D = B_2.$$

   Claramente B_1 y B_2 son medibles y $B_2 \setminus B_1 = D$, por tanto $\mu(B_2 \setminus B_1) = \mu(D) = 0$. Por ser μ completa, se tiene que $E \in \mathcal{A}$. **Q.E.D.**

2. Si las f_n son medibles $\forall n$ y $f_n \longrightarrow f$ c.t.p. entonces f es medible
   Indicación: Si $g = \limsup f_n$, entonces g es medible y $g = f$ c.t.p.

Si μ no fuera completa, **los resultados anteriores podrían no ser ciertos**, como vemos en el siguiente ejemplo: Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}$ y $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty)$ con $\mu(\emptyset) = \mu(\{1, 2\}) = 0$ y $\mu(\{3\}) = \mu(X) = 1$. Definimos $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(1) = f(2) = f(3) = 3$ y $g(x) = x$, entonces

- f es medible
- $f = g$ c.t.p. porque $\{x : f \neq g\} = \{1, 2\}$
- g no es medible, porque $g^{-1}((0, 1]) = \{1\} \notin \mathcal{A}$

Ejercicio: Completar la σ-álgebra y la medida anteriores. [*]

Ejercicios Probar:

- Si f es medible e integrable, entonces $|f(x)| < \infty$ c.t.p., es decir, $\{x : |f(x)| = \infty\}$ tiene medida cero.
- Si $f \in L^1(d\mu)$,

  $$\mu(\{x : \; |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \left(\int_X |f(x)| d\mu \right), \quad \forall a > 0.$$

  (Desigualdad de Chebychev)

- Si $f \in L^1(d\mu)$, entonces $|f(x)| < \infty$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$, el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ es σ-finito
- Si $f \geq 0$ y $\displaystyle\int f d\mu = 0$, entonces f=0 c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$ y $\displaystyle\int_E f d\mu = 0$, $\forall E \in \mathcal{A}$, entonces $f = 0$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$ entonces

$$\boxed{\int_X |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt.}$$

Indicación: Probarlo primero para funciones simples y usar luego el TCM.
Nota: Esta igualdad demuestra a las claras la relación existente entre integración y medida en la teoría de Lebesgue. Así, la integral de la función $|f|$ con respecto a la medida μ coincide con la integral impropia de Riemann (!) sobre $(0, \infty)$ de la función decreciente

$$t \to \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}),$$

dada por la medida de los conjuntos de nivel de $|f|$ de altura t.

2.11. Estructura topológica del espacio $L^1(d\mu)$

Definimos la siguiente relación de equivalencia en el espacio $L^1(d\mu)$ de funciones integrables en X:

$$f \mathcal{R} g \iff f = g \quad \text{c.t.p.}$$

De acuerdo a lo anterior, si $f\mathcal{R}g$ entonces $\displaystyle\int f = \int g$. Por abuso de notación llamamos $L^1(d\mu)$ también al espacio cociente $L^1(d\mu)/\mathcal{R}$. Entonces se tiene:

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio métrico**, con la métrica dada por:

$$d(f, g) = \int |f - g| d\mu, \quad f, g \in L^1(d\mu).$$

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio normado**, con la norma dada por:

$$\|f\| = \int |f| d\mu, \quad f \in L^1(d\mu).$$

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio de Banach**, es decir, toda sucesión de Cauchy de elementos de $L^1(d\mu)$ es convergente a un elemento de $L^1(d\mu)$.

2.12. Teorema de la Convergencia Dominada

TEOREMA 2.10 *En $(X, \mathcal{A}, \mu)$, espacio de medida, si la sucesión de funciones medibles $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función $f(x)$ y además $|f_n(x)| \leq F(x)$ $\forall n$, $\forall x$ con F medible, positiva y tal que $\int_X F(x)d\mu < \infty$, entonces $f(x)$ es integrable y se tiene*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0. \tag{2.3}$$

En particular,

$$\int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) d\mu = \int_X f(x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n(x)d\mu\right). \tag{2.4}$$

Demostración (del TCD):

El que f sea integrable es inmediato porque $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ implica $|f(x)| \leq F(x)$, $\forall x$ también y F es integrable (finita). Veamos también que (1) $\Rightarrow$ (2):

$$\left|\int_X f_n(x)d\mu - \int_X f(x)d\mu\right| = \left|\int_X (f_n(x) - f(x)d\mu)\right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \stackrel{n\uparrow\infty}{\longrightarrow} 0.$$

y esto implica (2).

Sólo necesitamos probar (1). Veamos que es una consecuencia del Lema de Fatou:

Sean $h_n = 2F(x) - |f_n(x) - f(x)|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces $h_n \geq 0$ y $\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 2F(x)$. Por Fatou deducimos:

$$\int_X 2F(x)d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X 2F(x)d\mu - \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu\right) =$$

$$= \int_X 2F(x)d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu.$$

Despejando queda

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \leq 0,$$

y, por tanto, lo anterior debe ser igual a 0. Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu = 0.$$

Q.E.D.

Observación: En el Teorema de convergencia dominada, en el caso cuando μ es completa, se puede pedir que $f_n(x)$ converge a $f(x)$ en casi todo punto x.

COROLARIO 2.11 *: Si* $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$*, son medibles y* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\int |f_k(x)|d\mu < \infty$*, entonces la serie* $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ *converge en c.t.p. y*

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_X f_k(x)d\mu\right).$$

Demostración:

Si $F(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|$, aplicamos el TCM para deducir que $\displaystyle\int_X F < \infty$ y, por tanto, $F(x) < \infty$ c.t.p. A continuación usamos el TCD sobre las sumas parciales de la serie.

Q.E.D.

2.13. ANEXO I: Sobre las funciones simples y su integral

Algunos libros exigen en la definición de función simple la condición adicional de que los conjuntos que la definen sean todos de medida finita. Para aclarar este punto y como motivación general, vamos a estudiar la siguiente situación en cierta forma "patológica":

- Sea X un conjunto con más de un elemento y elijamos $A \in \mathcal{P}(X)$, con $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$.

  Definimos la σ-álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ y la medida $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ por $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A^c) = 1$, $\mu(A) = \mu(X) = \infty$.

  Sea $f = \chi_A$. Con la condición adicional, f no sería simple porque $\mu(A) = \infty$. Además la única función simple s con $0 \leq s \leq f$ sería $s = c\chi_\emptyset$, por lo que $\int s d\mu = 0$ y por tanto $\int f d\mu = \sup\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f\} = 0$ **.** Esto crea el problema de desasociar la noción de integral con la de medida.

Lo cierto es que si la medida μ fuera σ**-finita** esta situación no se daría porque si $\exists X_1, X_2,\ldots,X_n,\ldots$ tales que

1. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (podemos suponer que la unión es disjunta)
2. $\mu(X_n) < \infty$,

entonces $\forall A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = \infty$ se tiene incluso en esta situación más restrictiva $\int \chi_A d\mu = \infty$.

Para probarlo, sean $A_n = A \cap X_n$, $n = 1, 2, 3, ...$ y $s_n = \sum_{j=1}^{n} \chi_{A_j}$, entonces cada s_n es simple en el sentido actual (porque $\mu(A_j) < \infty$) y $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq ... \longrightarrow \chi_A$, por tanto

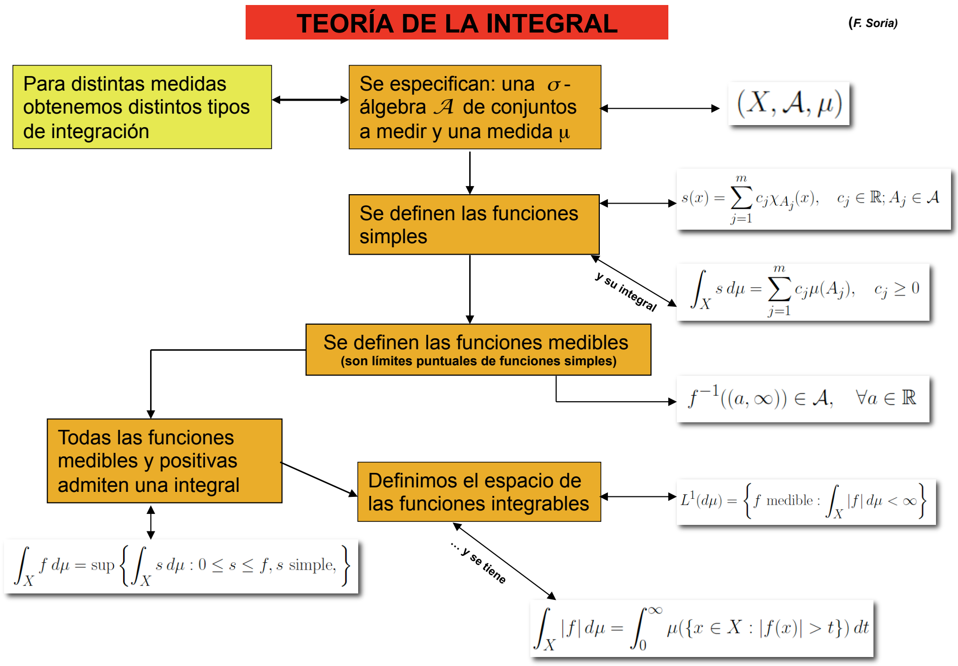
$$\int_X \chi_A d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \mu(A) = \infty.$$

Q.E.D.

Aún admitiendo que las medidas σ-finitas son las que con más frecuencia aparecen, no debemos olvidar el caso, entre otros, de la medida de contar en un espacio no numerable que claramente no es σ-finita. Por ello, y para evitar la patología descrita, es conveniente dar la definición de función simple e integral que hemos introducido anteriormente.

Ya hemos visto que toda función medible y positiva tiene asociada en principio una integral. La clase más importante es de todas formas aquella de las funciones cuya integral es además finita.

2.14. La integral de Lebesgue, un esquema



Capítulo 3

Métodos generales para construir medidas. Las medidas de Lebesgue y de Lebesgue-Stiltjes

DEFINICIÓN 3.1 *Recordamos que un* ***espacio de medida*** *es una terna* $(X, \mathcal{A}, \mu)$, *donde* X *es un conjunto,* $\mathcal{A}$ *es una* σ*-álgebra y* μ *una medida. Un espacio de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *se denomina* ***de Probabilidad*** *si se cumple* $\mu(X) = 1$.

En este Capítulo vamos a dar ejemplos de las medidas más habituales y de sus propiedades, empezando por la medida original de Lebesgue definida en la recta real $\mathbb{R}$. Para ello utilizaremos argumentos que nos permitirán construir dichas medidas a partir de su definición sobre conjuntos simples, como son los intervalos.

Comenzamos estudiando el concepto de un tipo especial de medida, la que se denomina completa.

3.1. Medidas exteriores

Hay una segunda forma de encontrar medidas completas que también sirve para extender pre-medidas (es decir funciones σ-aditivas sobre álgebras) a medidas en el sentido habitual (Teorema de Caratheodory), para ello introducimos la siguiente

DEFINICIÓN 3.2 *Se dice que* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow [0, \infty]$ *es* ***medida exterior*** *si cumple:*

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.

2. *Si* $A \subset B$, $\quad \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

3. $\mu^* \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Ejemplo: Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{D}$ y supongamos que $\rho : \mathcal{D} \longrightarrow [0,\infty]$ cumple $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces $\rho^*(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : \quad A_i \in \mathcal{D} \quad y \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A \right\}$ es una medida exterior.

Demostración: 1) y 2) son elementales. Probemos 3). Sean $\{A_n\}_n \subset \mathcal{P}(X)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n) = \infty$, no hay nada que probar. En caso contrario, $\forall \varepsilon\ \forall n$, existe $\{E_i^n\}_{i\geq 1} \subset \mathcal{D}$ tal que

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^n \quad y \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho\left(E_i^n\right) \leq \rho^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Entonces,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i^n) \right) \quad y$$

$$\rho^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon,$$

luego

$$\rho^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n).$$

Q.E.D.

Premedidas.

Un caso particular del ejemplo anterior viene dado por la noción de pre-medida.

DEFINICIÓN 3.3 *Dada una álgebra $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \longrightarrow [0,\infty]$ es una* ***pre-medida*** *si verifica:*

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$
2. *Si $B_i \in \mathcal{B}_0$ son disjuntos y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}_0$ entonces, $\mu_0 \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i)$.*

(μ_0 sería de hecho una medida si supiéramos de antemano que $\mathcal{B}_0$ es σ-álgebra).
La medida exterior asociada es entonces:

$$\mu^*(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) : \quad A_i \in \mathcal{B}_0 \quad y \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A \right\}$$

Conjuntos medibles (para una medida exterior).

DEFINICIÓN 3.4 *Dada una medida exterior μ^* sobre X se dice que $A \subset X$ es* ***μ^*-medible*** *(o medible con respecto a μ^*) si*

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subset X.$$

Notación: A la clase anterior la denotaremos por $\mathcal{A}^* = \{A \subset X : A \text{ es } \mu^*\text{-medible } \}$.

Observación: Como se cumple siempre que $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, entonces A es μ^*-medible $\Longleftrightarrow \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ para todo E.

Ejercicio: Probar que $\mu^*(A) = 0 \Longrightarrow A$ es μ^*-medible. [*]

3.2. Teorema(s) de Caratheodory

TEOREMA 3.1 (de Caratheodory (I)) *Si μ^* es una medida exterior sobre X y definimos $\mathcal{A}^*$ como antes. Entonces $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra y $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ (restricción de μ^* a $\mathcal{A}^*$) es una medida completa.*

TEOREMA 3.2 (de Caratheodory (II)) *Sea μ_0 una pre-medida sobre $\mathcal{B}_0$ y definamos una medida exterior μ^* y la clase $\mathcal{A}^*$ de los μ^*-medibles como antes. Entonces:*

1. *$\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{B}_0$*
2. *$\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida completa que extiende a μ_0*

Construcción de medidas: Antes de la demostración, veamos algunos ejemplos clave:

1-La medida de Lebesgue: Sea el álgebra $\mathcal{B}_0$ generada por los intervalos de la forma $(a, b]$, $(a < b \; : \; a, b \in \mathbb{R})$. Es decir, $\mathcal{B}_0$ está formada por las uniones finitas de esos intervalos y sus complementarios. [*]

Definimos $\mu_0((a, b]) = b - a$ y extendemos la definición a $\mathcal{B}_0$ de manera obvia. Entonces se tiene:

- μ^* es la medida exterior de Lebesgue
- $\mathcal{A}^*$ es la σ-álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue.
- $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es la medida de Lebesgue ($\mu(I)$ =Longitud de I, $\forall I$ Intervalo).

2-Construcción de las medidas de Lebesgue-Stieltjes: Con más generalidad, tenemos la siguiente afirmación.

PROPOSICIÓN 3.3 *Sea $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha. Definimos $\mu_0 = \mu_F$ sobre el álgebra $\mathcal{B}_0$, poniendo*

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

y extendiéndola a uniones finitas de intervalos semiabiertos de tipo $(a_j, b_j]$. Entonces $\mu_0 = \mu_F$ es una pre-medida sobre $\mathcal{B}_0$.

Observación: La continuidad de F por la derecha es necesaria que μ_F sea una pre-medida. Esto se sigue de la fórmula $(a,b] = \cup_n (a+1/n, b]$, luego se tiene que cumplir que $\lim_{n\to\infty} \mu_F((a+1/n,b]) = \mu_F((a,b])$, lo que se traduce en

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{n\to\infty} F(a+1/n) = F(a).$$

Demostración de la Proposición 3.3: Como $\mathcal{B}_0$ consiste de uniones finitas de intervalos semi-abiertos $(a_j, b_j]$, hay que demostrar lo siguiente:

(*) Si $(c,d]$ es una unión disjunta de intervalos $(a_k, b_k]$, entonces

$$\mu_F((c,d]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(a_k, b_k]).$$

Es fácil ver que para todo N, $\mu_F((c,d]) \geq \sum_{k=1}^{N} \mu_F((a_k,b_k])$, luego $\mu_F((c,d]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k,b_k])$.

Para demostrar la desigualdad contraria, utilizamos la compacticidad de intervalos finitos cerrados. Fijamos un $\varepsilon > 0$. Como F es continua por la derecha, existe un $\hat{c} \in (c,d]$ (cercano a c) tal que $\mu((\hat{c},d]) > \mu((c,d]) - \varepsilon$. Escogemos también puntos $\hat{b}_k > b_k$, cercanos a b_k, de forma que $F(\hat{b}_k) \leq F(b_k) + 2^{-k-1}\varepsilon$. Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, \hat{b}_k]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, b_k]) + \varepsilon.$$

Los intervalos abiertos $(a_k, \hat{b}_k)$ recubren el intervalo cerrado $[\hat{c}, d]$. Este recubrimiento tiene un subrecubrimiento finito, lo que nos da

$$\cup_{j=1}^{N} (a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}] \supset \cup_{j=1}^{N} (a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}) \supset [\hat{c}, d] \supset (\hat{c}, d].$$

En esta situación, es fácil demostrar (y es obvio) que

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_F((a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}]) \geq \mu_F((\hat{c}, d])$$

(se puede emplear la inducción en N). Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F((a_{k_j}, b_{k_j}]) \geq \left(\sum_{j=1}^{N} \mu_F((a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}]) \right) - \varepsilon \geq \mu_F((\hat{c}, d]) - \varepsilon \geq \mu_F((c,d]) - 2\varepsilon.$$

Esto termina la prueba, porque $\varepsilon > 0$ era arbitrario. **Q.E.D.**

La medida dada por la extensión de Caratheodory se denota por $\mu = dF$. En particular si $F(x) = x$ estamos en el caso de la medida de Lebesgue que se denota por dx. [*]

Demostración del Teorema de Caratheodory (I):
a) $\mathcal{A}^*$ es σ-álgebra: $\emptyset, X \in \mathcal{A}^*$ y si $A \in \mathcal{A}^*$, entonces $A^c \in \mathcal{A}^*$ trivialmente por simetría de la definición.
Para la unión, veamos primero que si $A, B \in \mathcal{A}^*$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}^*$:
Dado $E \subset X$ se tiene

$$E \cap (A \cup B) = E \cap (A \cap B) \ \ \cup \ \ E \cap (A \cap B^c) \ \ \cup \ \ E \cap (A^c \cap B),$$

por tanto

$$\mu^* \left(E \cap (A \cup B)\right) + \mu^* \left(E \cap (A \cup B)^c\right) \leq \mu^* \left(E \cap A \cap B\right) + \mu^* \left(E \cap A \cap B^c\right) +$$

$$+\mu^* \left(E \cap A^c \cap B\right) + \mu^* \left(E \cap A^c \cap B^c\right) \overset{B \in \mathcal{A}^*}{=} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \overset{A \in \mathcal{A}^*}{=} \mu^*(E).$$

Por inducción, la unión finita de elementos de $\mathcal{A}^*$ está en $\mathcal{A}^*$ y por tanto $\mathcal{A}^*$ es una álgebra. Además μ^* es aditiva en $\mathcal{A}^*$, pues si $A, B \in \mathcal{A}^*$, y $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$\mu^*(A \cup B) \overset{A \in \mathcal{A}^*}{=} \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Para probar que $\mathcal{A}^*$ es σ-álgebra sólo tenemos que ver que si $\{A_j\}_j \subset \mathcal{A}^*$ son disjuntos, entonces $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}^*$. Además aprovecharemos para probar que

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j),$$

y por tanto que $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida sobre $\mathcal{A}^*$. Para ello sea

$$B_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \ \ y \ \ B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

tal que $B_n \in \mathcal{A}^*$. Sea $E \subset X$ arbitrario.

$$\mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) =$$

$$= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2}) = ... = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(E \cap A_j).$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) = \lim_{n \to \infty} \mu^*(E \cap B_n) \leq \mu^*(E \cap B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j).$$

De esto se deduce la igualdad $\forall E \subset X$

$$\lim_{n \to \infty} \mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j),$$

si $\{A_j\} \subset \mathcal{A}^*$ son disjuntos. Finalmente

$$\mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) = \lim_{n\to\infty} [\mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B^c)] \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} [\mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c)] = \mu^*(E) \Longrightarrow B \in \mathcal{A}^*.$$

Además, tomando $E = X$ se tiene

$$\mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

b) μ^* es completa: Sea $A \in \mathcal{A}^*$ con $\mu^*(A) = 0$. Entonces $\forall B \subset A$ también se tiene $\mu^*(B) = 0$ y por tanto (por el ejercicio propuesto) $B \in \mathcal{A}^*$

Q.E.D.

Demostración del Teorema de Caratheodory (II):
Ya sabemos (por el Teorema (I) anterior) que $\mathcal{A}^*$ es una σ-álgebra y que $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida completa sobre $\mathcal{A}^*$. Nos falta por probar:

a') $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}^*$,

b') $\mu(A) = \mu_0(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}_0$.

Para ello,

a') Sea $A \in \mathcal{B}_0$ y $E \subset X$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \{B_j\} \subset \mathcal{B}_0$ tal que $\bigcup B_j \supset E$ y

$$\sum \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Como

$$\bigcup (B_j \cap A) \supset E \cap A \quad y \quad \bigcup (B_j \cap A^c) \supset E \cap A^c,$$

se tiene,

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \sum_j \mu_0(B_j \cap A) + \sum_j \mu_0(B_j \cap A^c) =$$

$$= \sum_j \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon.$$

Luego

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E) \quad y \quad A \in \mathcal{A}^*.$$

b') Si $A \in \mathcal{B}_0$, claramente $\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu_0(A)$. Para la otra desigualdad, si $\{B_j\} \subset \mathcal{B}_0$ y $\bigcup B_j \supset A$, entonces poniendo

$$\overline{B_j} = B_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i,$$

$\{\overline{B_j}\}$ es una familia disjunta de $\mathcal{B}_0$ con $\bigcup_j \overline{B_j} = \bigcup_j B_j \supset A$. Como $A = \bigcup_j (A \cap \overline{B_j})$, se tiene

$$\mu_0(A) = \sum_j \mu_0 \left(A \cap \overline{B_j} \right) \leq \sum_j \mu_0 \left(\overline{B_j} \right) \leq \sum_j \mu_0(B_j).$$

Tomando ínfimos, queda $\mu_0(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$.

Q.E.D.

Observaciones:

1. Si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida y μ no es completa, entonces hay dos formas, como hemos visto de completarla:

   - Por el primer Teorema de este capítulo, se obtiene $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$
   - Por el Teorema de Caratheodory 2, se obtiene $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$, tomando a μ^* la medida exterior inducida por μ que, al ser medida, también es premedida.

   La relación entre ambas formas de completar la medida es la siguiente:

   - $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^* \quad y \quad \mu^*|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$. [*]
   - Si μ es σ-finita, entonces $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^*$ [*]

2. Si μ_0 es una pre-medida sobre $\mathcal{B}_0$, y $\mathcal{A}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{B}_0$ entonces hay una extensión de μ_0 a una medida sobre $\mathcal{A}$. (Simplemente tomamos $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ porque $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$). Si μ_0 es σ-finita, esta extensión es única.

3. Si μ^* es una medida exterior en X, que proviene de una pre-medida μ_0, y $\mu^*(X) < \infty$, entonces también se tiene

   $$\mathcal{A}^* = \{A \subset X : \ \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(X)\}$$

   (Recordar aquí la definición de subconjunto medible de $[0,1]$ dada por Lebesgue: $A \subset [0,1]$ es medible si y solo si $m^*(A) + m^*([0,1] \setminus A) = 1$.)

   [*]

Para las demostraciones de estas afirmaciones, ver *[G.B. Folland, Real Analysis. Modern techniques and their applications. John Wiley & Sons, 1984]*, Capítulo 1, Teorema 1.14 y ejercicios 18 y 19.

3.3. Propiedades de medidas de Lebesgue y de Lebesgue-Stieltjes

Ejemplos de medidas de Lebesgue-Stieltjes:

1. $F(x) = x$; $\mu_F((a,b]) = b - a$; $\ dF = \mu^*|_{\mathcal{A}^*} = m$, medida de Lebesgue.
2. $F(x) = e^x$; $\mu_F((a,b]) = e^b - e^a \ ; \ \forall A \in \mathcal{A}^* \ , \ dF(A) = \int_A e^x dm(x)$.
3. En general, si sabemos además que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $f = F'$, $\forall A \in \mathcal{A}^*$ se tiene

   $$dF(A) = \int_A f(x)dm(x) = \int_A F'(x)dm(x) \quad (dF = F'dx),$$

   porque $\mu_F((a,b]) = F(b) - F(a) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

4. Función de Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 1, \text{ si } x \geq 0, \\ 0, \text{ si } x < 0. \end{cases}$

   $\mu_H((a,b]) = \begin{cases} 1, \text{ si } a < 0 \leq b, \\ 0, \text{ si } b < 0 \text{ ó } a \geq 0. \end{cases}$ La extensión es $\mu_H^* = \delta_0$ (Dirac en 0)

5. $F(x) = [x]$: parte entera de x $(= \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\})$; $\mu_F((a,b]) = \#\{k : a < k \leq b\}$. $\mu_F^*(A) = dF(A) = \#(A \cap \mathbb{Z})$ es la medida de contar en $\mathbb{Z}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$.

TEOREMA 3.4 *(Invarianza por traslaciones y dilataciones) Dado $E \subset \mathbb{R}$, definimos para $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x_0 + E = \{x_0 + y : \ y \in E\}$ y $r \cdot E = \{r \cdot y : \ y \in E\}$. Entonces si $E \in \mathcal{L}$ se tiene $x_0 + E \in \mathcal{A}$, $r \cdot E \in \mathcal{A}$ y $m(x_0 + E) = m(E)$, $m(r \cdot E) = r \cdot m(E)$.*

Demostración: Esto se deduce de que m es invariante en la clase $\mathcal{B}_0$, puesto que si $E = (a,b]$, $x_0 + E = (x_0 + a, x_0 + b]$ y $m(x_0 + E) = b - a = m(E)$, análogamente, $r \cdot E = (r \cdot a, r \cdot b]$ y $m(r \cdot E) = r \cdot b - r \cdot a = r \cdot m(E)$

Q.E.D.

TEOREMA 3.5 *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable Riemann, entonces f es medible Lebesgue y por tanto es integrable Lebesgue y además*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dm.$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos una partición P_n del intervalo $[a,b]$ tal que $\mathrm{U}_f(P_n) - \mathrm{L}_f(P_n) \leq \frac{1}{n}$. Podemos suponer que $P_1 \subset P_2 \subset ... \subset P_n \subset P_{n+1} \subset ...$ (o si no, tomar particiones más finas).

Si $\{I_j^n\}_{j \geq 1}$ son los intervalos asociados a la partición P_n definimos:

$$s_n(x) = \sum_{j \geq 1} \inf_{I_j^n}(f) \cdot \chi_{I_j^n}(x) \quad , \quad S_n(x) = \sum_{j \geq 1} \sup_{I_j^n}(f) \cdot \chi_{I_j^n}(x).$$

Entonces $\{s_n\}$ y $\{S_n\}$ son funciones simples (en el sentido Lebesgue). Además

$$s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s_{n+1} \leq ... \leq f(x) \leq ... \leq S_{N+1} \leq S_N \leq ... \leq S_2 \leq S_1.$$

Sean $g(x) = \lim_{n \to \infty} s_n(x)$ y $G(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$. Se tiene que g y G son medibles (porque son límite de funciones simples). Además $g(x) \leq f(x) \leq G(x)$ y, como

$$\int (G - g)dm \leq \int (S_n - s_n)dm = \mathrm{U}_f(P_n) - \mathrm{L}_f(P_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n,$$

concluimos $\displaystyle\int (G - g)dm = 0$. Por tanto $G - g = 0$ c.t.p. Luego $f = g = G$ c.t.p. f es medible Lebesgue y

$$\int f dm = \int G dm = \lim_{n \to \infty} \int S_n dm = \int_a^b f(x)dx.$$

Q.E.D.

3.4. Medidas de Borel

DEFINICIÓN 3.5 *Se dice que μ es una* **medida de Borel en** $\mathbb{R}$ *si está definida sobre la σ-álgebra de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.*

LEMA 3.6 *Toda premedida μ_F definida como antes sobre $\mathcal{B}_0$ se puede extender (de forma única) a una medida de Borel.*

Esto es inmediato porque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima σ-álgebra que contiene a $\mathcal{B}_0$ y por tanto

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}^*$$

La extensión viene dada por la restricción de $dF = \mu^*_{F|_{\mathcal{A}^*}}$ a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Recordatorio : Su extensión a todo $\mathcal{A}^*$ se denomina la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada, que hemos denotado por dF.

En general **no es cierto que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{A}^*$ coincidan**. Así por ejemplo el caso 3 anterior (delta de Dirac) se tiene $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y, como veremos, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De hecho, se tiene

LEMA 3.7 *Si m es la medida de Lebesgue y denotamos por $\mathcal{L}$ los conjuntos medibles de Lebesgue, entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (contenidos estrictos).*

Demostración: La primera parte es una cuestión de cardinales porque $card(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0} = c$ (ya que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por la familia numerable $\{(a, \infty) : \ a \in \mathbb{Q}\}$), mientras que $card(\mathcal{L}) > c$ (puesto que el conjunto de Cantor $\mathcal{C} \in \mathcal{L}$ y como $m(\mathcal{C}) = 0$ y $\mathcal{L}$ es completa, $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$. Por otro lado, $card(\mathcal{C}) = c$ y por tanto $card(\mathcal{L}) \geq card(\mathcal{P}(\mathcal{C})) > c$).

Para ver que $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ basta recordar que, por el axioma de elección, encontramos un conjunto no medible de Lebesgue (para ello utilizamos la invarianza por traslación $m(x + A) = m(A)$ si $x \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}$, que veremos más adelante). **Q.E.D.**

El recíproco a la nota es parcialmente cierto como se ve en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.8 *Si μ es una medida de Borel finita sobre conjuntos acotados, entonces μ proviene de cierta pre-medida μ_F sobre $\mathcal{B}_0$.*

Para verlo basta definir $F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Claramente F es creciente, continua por la derecha y $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. [*]

Ejemplos:

1. $\mu = m_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, $F(x) = \left\{ \begin{array}{l} x, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ -(-x), \text{ si } x < 0 \end{array} \right\} = x$

2. $\mu = \delta_0|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$, $F(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right.$ es decir, $F = H - 1$, y es que...(1)

[1] **Ejercicio**: $\mu_F = \mu_G \Longleftrightarrow F - G = \text{constante}$

No todas las medidas de Borel provienen de una pre-medida μ_F. Por ejemplo, si μ es la medida de contar sobre $\mathbb{R}$, su restricción $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ no viene de una μ_F porque $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}((a,b]) = \infty \ \forall a, b$.

3.4.1. Observaciones sobre las medidas de Lebesgue-Stieltjes

Sea F una función de distribución (i.e., creciente y continua por la derecha) y dF la correspondiente medida de Lebesgue-Stieltjes. Supongamos que existe un conjunto abierto A en donde F es derivable. Si $D = \mathbb{R} \setminus A$ entonces se tiene para toda función $f \in L^1(dF)$

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dF = \int_A f(t)\,F'(t)\,dt + \int_D f\,dF.$$

Si D corresponde a los puntos de discontinuidad de F (y es por tanto numerable) entonces se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dF = \int_A f(t)\,F'(t)\,dt + \sum_{z\in D}\int_{\{z\}} f\,dF = \int_A f(t)\,F'(t)\,dt + \sum_{z\in D} f(z)\,dF(\{z\}).$$

Este es el caso más frecuente que hemos visto hasta ahora ... pero no el único.

La función de Cantor (o escalera del diablo) Se define de la siguiente forma:

- $F(x) = 0$ si $x \le 0$ y $F(x) = 1$ si $x \ge 1$.
- Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor ternario. Si $x \in \mathcal{C}$ entonces podemos escribir x de forma única como $\sum_{k\ge 1} b_k 3^{-k}$, con $b_k = 0, 2$. Para este x definimos

$$F(x) = \sum_{k\ge 1} \frac{b_k}{2} 2^{-k} = \sum_{k\ge 1} \frac{b_k}{2^{k+1}}.$$

- Para el resto de puntos en el abierto $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ definimos F de forma constante, simplemente por interpolación.

Entonces, F es una distribución de Probabilidad continua. Además es derivable en el abierto $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$, con derivada 0. Por lo tanto, si $\int |f|\,dF < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} f\,dF = \int_{\mathcal{C}} f\,dF.$$

Obsérvese que el conjunto de Cantor, $\mathcal{C}$, NO es numerable, y por tanto no se puede continuar expandiendo la integral como una suma.

La función de Cantor también se puede construir por aproximaciones sucesivas de la manera siguiente: Consideramos el complementario en $[0,1]$ del conjunto de Cantor $\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$.

- En el primer paso, $n=1$, $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 1, \\ 1/2, & \text{si } x \in I_{1,1}, \\ --, & \text{interpolación lineal en el resto .} \end{cases}$

  Por inducción, para $n \geq 2$,

- En el paso n, $f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k} \bigcup (-\infty, 0] \bigcup [1, \infty), \\ f_{n-1}(c_{n,k}), & \text{si } x \in I_{n,k},\ c_{n,k} \text{ es el punto central de } I_{n,k}, \\ & k = 1, \ldots, 2^{n-1}. \\ --, & \text{interpolación lineal en el resto .} \end{cases}$

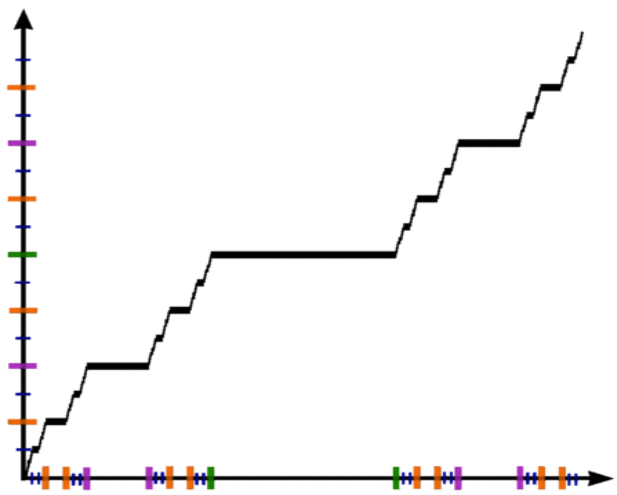


Figura 3.1: Función de Cantor en el paso $n = 6$

Con la sucesión de funciones, $\{f_n\}_n$, así construida se tiene que

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \qquad \forall n, \forall x.$$

Por lo tanto, la sucesión converge uniformemente a cierta función $F(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x), \forall x$. Claramente F es continua (porque las f_n lo son) y no decreciente (porque las f_n también lo son).

3.5. Medidas regulares en $\mathbb{R}$

DEFINICIÓN 3.6 *Dado* $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ *espacio de medida se dice que* μ *es* ***regular*** *(en* $\mathbb{R}$*) si verifica:*

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$
- *Regularidad exterior, esto es:*

$$\mu(A) = \text{ínf}\{\mu(U) : A \subset U,\, U \text{ abierto}\}$$

- *Regularidad interior, esto es:*

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A,\, K \text{ compacto}\}$$

PROPOSICIÓN 3.9 *La medida de Lebesgue, m, es regular.*

Ejercicio: Probar lo mismo para cualquier medida de Lebesgue-Stieltjes.

Demostración de la proposición:
Regularidad exterior:

Sabemos, por la construcción de m, que

$$m(A) = \text{ínf}\left\{ \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) \quad : \quad \bigcup_{j=1}^{\infty}(a_j, b_j] \supset A \right\}, \qquad \forall A \in \mathcal{L}.$$

Dados $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{A}$ y un recubrimiento arbitrario $\{(a_j, b_j]\}_j$ de A sea

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty}\left(a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^j}\right).$$

Entonces U es abierto, $U \supset A$ y

$$m(A) \leq m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty}(b_j - a_j) + \varepsilon.$$

Tomando ínfimos, queda $m(A) \leq \text{ínf}\{m(U) : U \supset A, \text{ abierto}\} \leq m(A) + \varepsilon$. Como ε es arbitrario, la primera desigualdad es realmente una igualdad.

Regularidad interior:

Para probar la regularidad interior supongamos primero que A es acotado (por ejemplo $A \subset [-N, N]$). Sea $A' = [-N, N] \setminus A$. Por el apartado anterior, dado $\varepsilon > 0$, $\exists U$ abierto tal que $U \supset A'$ y $m(U) \leq m(A') + \varepsilon$. Entonces $K = [-N, N] \setminus U$ es compacto, $K \subset A$ y además

$$m(K) \leq m(A) = m([-N, N]) - m(A') \leq m([-N, N]) - m(U) + \varepsilon \leq m(K) + \varepsilon.$$

Tomando supremos queda $m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A \text{ compacto}\}$.

Si A no es acotado, aplicamos el resultado a cada conjunto $A_N = [-N, N] \cap A$ y usamos que $m(A) = \lim_{N \to \infty} m(A_N)$

Q.E.D.

COROLARIO 3.10 *: Si A es medible Lebesgue ($A \in \mathcal{L}$), existen dos conjuntos de Borel $U, V \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tales que $U \subset A \subset V$ y $m(U) = m(A) = m(V)$. De hecho se tiene que V es la intersección numerable de abiertos y U es una unión numerable de compactos.*

Capítulo 4

Medidas producto. Teorema de Fubini

Dados dos espacios de medida, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$, empezaremos por definir una σ-álgebra en $X \times Y$, la σ-álgebra producto, a partir de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$. A continuación definiremos una medida sobre la σ-álgebra producto, la medida producto, a partir de μ y ν. Finalmente relacionaremos la integral con respecto a la medida producto con la integración iterada con respecto a las medidas en los espacios factores.

4.1. Medidas producto

DEFINICIÓN 4.1 *Sean $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Un* rectángulo medible *en $X \times Y$ es un conjunto de la forma $A \times B$ con $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$.*

Observación. $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$.

LEMA 4.1 *La intersección de rectángulos medibles es un rectángulo medible.*

Demostración. Sean $A, A' \in \mathcal{A}$, $B, B' \in \mathcal{B}$. Entonces $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$ es un rectángulo medible, puesto que $A \cap A' \in \mathcal{A}$ y $B \cap B' \in \mathcal{B}$, ya que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son σ-álgebras. ■

LEMA 4.2 *La unión de un número finito de rectángulos medibles se puede escribir como una unión finita* y disjunta *de rectángulos medibles.*

Demostración. Basta demostrarlo para dos rectángulos. Observamos que

$$\begin{aligned} A \times B &= [(A \setminus A') \cup (A \cap A')] \times [(B \setminus B') \cup (B \cap B')] \\ &= (A \setminus A') \times (B \setminus B') \cup (A \cap A') \times (B \setminus B') \cup (A \setminus A') \times (B \cap B') \cup (A \cap A') \times (B \cap B'). \end{aligned}$$

De forma similar,

$$A' \times B' = (A' \setminus A) \times (B' \setminus B) \cup (A' \cap A) \times (B' \setminus B) \cup (A' \setminus A) \times (B' \cap B) \cup (A \cap A') \times (B \cap B').$$

Por tanto, la unión $(A \times B) \cup (A' \times B')$ está formada por, como mucho, siete rectángulos, todos ellos disjuntos. ■

LEMA 4.3 *La familia* $\Pi_0 = \left\{ \bigcup_{j=1}^N (A_j \times B_j) : A_j \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B}, N \in \mathbb{N} \right\}$ *es un álgebra en* $X \times Y$.

Demostración. Solo hay que demostrar que Π_0 es cerrada por complementarios. Gracias al lema 4.1, puesto que

$$\Big(\bigcup_{j=1}^N (A_j \times B_j) \Big)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{j=1}^N (A_j \times B_j)^{\mathrm{c}},$$

basta con demostrar que $(A \times B)^{\mathrm{c}} \in \Pi_0$ si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$. Esto es fácil de comprobar, ya que

$$\begin{aligned} (A \times B)^{\mathrm{c}} = (X \times Y) \setminus (A \times B) &= (A \cup A^{\mathrm{c}}) \times (B \cup B^{\mathrm{c}}) \setminus (A \times B) \\ &= (A \times B^{\mathrm{c}}) \cup (A^{\mathrm{c}} \times B) \cup (A^{\mathrm{c}} \times B^{\mathrm{c}}), \end{aligned}$$

puesto que $A^{\mathrm{c}} \in \mathcal{A}$ y $B^{\mathrm{c}} \in \mathcal{B}$ por ser $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ σ-álgebras.

■

DEFINICIÓN 4.2 *Sean* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *e* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *dos espacios de medida. Dado un rectángulo medible* $A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$, *definimos*

$$\pi_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

Dado un elemento $U \in \Pi_0$, *lo escribimos como unión disjunta de rectángulos, véase el lema 4.2,*

$$U = \bigcup_{j=1}^N (A_j \times B_j), \quad A_j \in \mathcal{A},\ B_j \in \mathcal{B}, \quad (A_j \times B_j) \cap (A_k \times B_k) = \emptyset \text{ si } j \neq k,$$

y definimos $\pi_0(U) = \displaystyle\sum_{j=1}^N \mu(A_j)\nu(B_j)$.

Para ver que π_0 está bien definida tenemos que comprobar que no depende de la descripción de la descripción elegida de $U \in \Pi_0$ como unión disjunta de rectángulos medibles.

LEMA 4.4 *La función* $\pi_0 : \Pi_0 \to [0, \infty]$ *está bien definida y es una premedida en* Π_0.

Demostración. Solo hace falta demostrar que si $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$ y se cumple

$$A \times B = \bigcup_{j=1}^\infty (A_j \times B_j), \qquad (A_j \times B_j) \cap (A_k \times B_k) = \emptyset \text{ si } j \neq k,$$

entonces $\pi_0(A \times B) = \displaystyle\sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)\nu(B_j)$. Para ello observamos que

$$\mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{A\times B}(x, y) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{1}_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{1}_{A_j}(x)\mathbb{1}_{B_j}(y).$$

Fijamos $y \in B$ e integramos la función resultante (que depende de x) respecto a la medida μ. Por el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\mu(A)\mathbb{1}_B(y) = \int_X \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A_j}(x)\mathbb{1}_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\mu(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{B_j}(y) \int_X \mathbb{1}_{A_j}(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\mathbb{1}_{B_j}(y).$$

Integrando ahora con respecto a la medida ν, usando de nuevo el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\mu(A)\nu(B) = \int_Y \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\mathbb{1}_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j) \int_Y \mathbb{1}_{B_j}(y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)\nu(B_j).$$

■

La σ-álgebra generada por Π_0 se denota por $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ y se conoce como σ-álgebra producto.

TEOREMA 4.5 (Medida producto) *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida. Existe una medida $\mu \otimes \nu$ definida sobre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ tal que*

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \textit{para todo } A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}.$$

Si los espacios de medida son σ-finitos hay una única medida con esta propiedad.

Demostración. El Teorema de Caratheodory nos permite extender $(X \times Y, \Pi_0, \pi_0)$ a un espacio de medida completo $(X \times Y, \Pi_0^*, \pi_0^* \mid_{\Pi_0^*})$. La restricción de π_0^* a la σ-álgebra $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ es la medida deseada. La unicidad en el caso de espacios de medida σ-finitos es consecuencia del teorema de Hahn.

■

Observación. Claramente se tiene $\mathcal{A}\times\mathcal{B} \subset \Pi_0 \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, pero, en general, $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ es mucho mayor que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Notación. Algunos libros escriben $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ para denotar a la σ-álgebra producto y $\mu \times \nu$ para la medida producto.

Dados n espacios de medida $(X_k, \mathcal{A}_k, \mu_k)$, $k = 1, \cdots, n$, consideramos el álgebra Π_0 de uniones finitas de rectángulos medibles $A_1 \times \cdots \times A_n$, $A_k \in \mathcal{A}_k$, $k = 1, \ldots, n$, y π_0 la premedida en Π_0 definida a partir de la fórmula

$$\pi_0(A_1 \times \cdots \times A_n) = \mu_1(A_1) \cdots \mu_n(A_n), \qquad A_j \in \mathcal{A}_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

El Teorema de Caratheodory permite extender $(X_1 \times \cdots \times X_n, \Pi_0, \pi_0)$ a un espacio de medida completo $(X_1 \times \cdots \times X_n, \Pi_0^*, \pi_0^* \mid_{\Pi_0^*})$. La restricción de π_0^* a la σ-álgebra $\mathcal{A}_1\otimes\cdots\otimes\mathcal{A}_n$ generada por Π_0 es la medida producto $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$.
Observación. Si todas las medidas μ_k, $k = 1, \ldots, n$, son σ-finitas, la medida producto se puede definir también de forma iterativa,

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n,$$

puesto que ambas definiciones coinciden sobre el álgebra Π_0.

4.2. Secciones y clases monótonas

Queremos demostrar que la integral con respecto a una medida producto se puede calcular como la iteración de las sucesivas integrales sobre cada variable. Para ello definimos antes la noción de sección.

DEFINICIÓN 4.3 *Dado $E \subset X \times Y$ y fijado $x \in X$ se define la x-*sección* de E como*

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}.$$

*De la misma forma, fijado $y \in Y$ se define la y-*sección* de E como*

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}.$$

*Dada una función $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$, para cada $x \in X$ se define la x-*sección* de f como la función $f_x : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f_x(y) = f(x, y)$. Análogamente, para cada $y \in Y$ se define la y-*sección* de f como la función $f^y : X \to \overline{\mathbb{R}}$ dada por $f^y(x) = f(x, y)$.*

PROPOSICIÓN 4.6 *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ dos espacios de medida.*

(i) *Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ y $x \in X$, $y \in Y$, entonces $E_x \in \mathcal{B}$, $E^y \in \mathcal{A}$.*

(ii) *Si $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ medible, entonces f_x es $\mathcal{B}$-medible para todo $x \in X$ y f^y es $\mathcal{A}$-medible para todo $y \in Y$.*

Demostración. (i) Sea $\mathcal{R} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{B},\ E^y \in \mathcal{A} \text{ para todo } x \in X, y \in Y\}$. Este conjunto contiene a los rectángulos medibles, porque si $E = A \times B$, entonces

$$E_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{si } x \notin A, \end{cases} \qquad E^y = \begin{cases} A & \text{si } y \in B, \\ \emptyset & \text{si } y \notin B. \end{cases} \tag{4.1}$$

Además $\mathcal{R}$ es una σ-álgebra en $X \times Y$. En efecto:

- $X \times Y \in \mathcal{R}$, porque es un rectángulo medible;
- $E \in \mathcal{R} \Rightarrow E^c \in \mathcal{R}$, porque $(E^c)_x = (E_x)^c$ y $(E^c)^y = (E^y)^c$;
- $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R} \Rightarrow \bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j \in \mathcal{R}$, porque $\big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\big)_x = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (E_j)_x$ y $\big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\big)^y = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} (E_j)^y$.

En particular, $\mathcal{R} \supset \Pi_0$, y por tanto $\mathcal{R} \supset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, por ser $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ la mínima σ-álgebra que contiene a Π_0.
(ii) Sea $x \in X$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Entonces

$$\{y \in Y : f_x(y) \geq \alpha\} = \{y \in Y : f(x, y) \geq \alpha\} = \{(x, y) \in X \times Y : f(x, y) \geq \alpha\}_x.$$

Por tanto, gracias al apartado (a), si f es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-medible entonces f_x es $\mathcal{B}$-medible. La $\mathcal{A}$-medibilidad de f^y se demuestra de forma análoga.

■

Necesitaremos también la noción de clase monótona.

DEFINICIÓN 4.4 *Sea X un conjunto no vacío. Se dice que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ es una* clase monótona *si*

$$
\begin{aligned}
(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C},\ E_n \subset E_{n+1} \textit{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C},\\
(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C},\ E_n \supset E_{n+1} \textit{ para todo } n \in \mathbb{N} \quad &\Longrightarrow \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{C}.
\end{aligned}
$$

PROPOSICIÓN 4.7 (Propiedades elementales de las clases monótonas)

(i) *Toda σ-álgebra es clase mónotona.*

(ii) *La intersección de clases monótonas es clase monótona. Se puede hablar por tanto de la mínima clase monótona, $\mathcal{C}(\mathcal{E})$, que incluye a una clase de conjuntos $\mathcal{E}$.*

(iii) *Si $\mathcal{A}$ es un álgebra, entonces $\mathcal{C}(\mathcal{A}) \equiv \sigma(\mathcal{A})$. Aquí $\sigma(\mathcal{E})$ denota a la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}$.*

La demostración (fácil para los dos primeros apartados, difícil para el tercero) se deja como ejercicio.

4.3. Teoremas de Tonelli y Fubini

Supongamos que $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ medible y positiva. La proposición 4.6 nos dice que la función f_x es medible y, como también es positiva, la podemos integrar en y con respecto a la medida ν, y podemos definir

$$g(x) = \int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu. \tag{4.2}$$

De la misma forma f^y es medible y positiva. Asi, podemos definir

$$h(y) = \int_X f^y \, \mathrm{d}\mu. \tag{4.3}$$

El teorema de Tonelli nos dirá que si μ y ν son σ-finitas, entonces tanto g como h son medibles (y positivas) y además

$$
\begin{aligned}
\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}(\mu\otimes\nu) &= \int_X g \, \mathrm{d}\mu = \int_X \int_Y f(x,y) \, \mathrm{d}\nu(y) \, \mathrm{d}\mu(x)\\
&= \int_Y h \, \mathrm{d}\nu = \int_Y \int_X f(x,y) \, \mathrm{d}\mu(x) \, \mathrm{d}\nu(y).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

El teorema de Fubini extenderá el resultado a funciones integrables.

Como en ocasiones anteriores, el resultado se deducirá del caso particular en que $f = \mathbb{1}_E$ para algún $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, que enunciamos y demostramos a continuación.

PROPOSICIÓN 4.8 *Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $f = \mathbb{1}_E$ con $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Entonces:*

(i) *la función* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *dada por* (4.2) *es* $\mathcal{A}$*-medible;*

(ii) *la función* $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *dada por* (4.3) *es* $\mathcal{B}$*-medible;*

(iii) *se verifica* (4.4).

Observación. En este caso particular $f_x = \mathbb{1}_{E_x}$ y $f^y = \mathbb{1}_{E^y}$, de forma que

$$g(x) = \int_Y \mathbb{1}_{E_x}\,\mathrm{d}\nu = \nu(E_x), \qquad h(y) = \int_X \mathbb{1}_{E^y}\,\mathrm{d}\mu = \mu(E^y),$$

y $\displaystyle\int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) = (\mu\otimes\nu)(E)$, de manera que (4.4) se transforma en

$$(\mu\otimes\nu)(E) = \int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Demostración. Supongamos para empezar que $\mu(X) < \infty$ y $\nu(Y) < \infty$.

Sea $\mathcal{C}$ la colección de todos los conjuntos $E \in \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ para los que se verifica la proposición. Vamos a demostrar que $\mathcal{C}$ es una clase monótona que contiene al álgebra Π_0 de las uniones disjuntas finitas de rectángulos medibles. Por consiguiente, gracias al apartado (iii) de la proposición 4.7, $\mathcal{C} \supset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, lo que demuestra el resultado.

Sea E un rectángulo medible, $E = A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Entonces

$$\mathbb{1}_{E_x}(y) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(y) = \mathbb{1}_{E^y}(x);$$

véase (4.1). Por consiguiente,

$$\nu(E_x) = \nu(B)\mathbb{1}_A(x), \quad \mu(E^y) = \mu(A)\mathbb{1}_B(y),$$
$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \nu(B)\mu(A), \quad \int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \mu(A)\nu(B),$$

luego $E \in \mathcal{C}$. Por aditividad, $\Pi_0 \in \mathcal{C}$.

Veamos ahora que $\mathcal{C}$ es una clase monótona. Sea $(E_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}$ tal que $E_n \subset E_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $E = \bigcup_{n=1}^\infty E_n \in \mathcal{C}$. Evidentemente,

$$E_x = \bigcup_{n=1}^\infty (E_n)_x\,, \quad E^y = \bigcup_{n=1}^\infty (E_n)^y\,.$$

Al ser la unión creciente, por la continuidad de las medidas para límites monótonos,

$$\nu(E_x) = \lim_{n\to\infty} \nu\big((E_n)_x\big), \quad \mu(E^y) = \lim_{n\to\infty} \mu\big((E_n)^y\big).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean $g_n : X \to [0,\infty]$ y $h_n : Y \to [0,\infty]$ dadas por

$$g_n(x) = \nu\big((E_n)_x\big), \quad h_n(y) = \mu\big((E_n)^y\big).$$

Por hipótesis, las funciones g_n son $\mathcal{A}$-medibles y las funciones h_n son $\mathcal{B}$-medibles. Por tanto, las funciones $g : X \to [0,\infty]$ y $h : Y \to [0,\infty]$ dadas por

$$g(x) = \nu(E_x), \qquad h(y) = \mu(E^y)$$

también son medibles, por ser límite de medibles. Además, como los límites son crecientes, el Teorema de la Convergencia Monótona y el hecho de que $E_n \in \mathcal{C}$ para cada $n \in \mathbb{N}$ nos dan

$$\int_X \nu(E_x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \nu\big((E_n)_x\big)\,\mathrm{d}\mu(x) = \lim_{n\to\infty} (\mu\otimes\nu)(E_n) = (\mu\otimes\nu)(E),$$
$$\int_Y \mu(E^y)\,\mathrm{d}\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \int_Y \mu\big((E_n)^y\big)\,\mathrm{d}\nu(y) = \lim_{n\to\infty} (\mu\otimes\nu)(E_n) = (\mu\otimes\nu)(E),$$

y por tanto $E \in \mathcal{C}$.

Sea ahora $(F_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}$ una sucesión tal que $F_n \supset F_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Queremos ver que $F = \bigcap_{n=1}^\infty F_n \in \mathcal{C}$. El argumento es análogo al que hemos hecho en el párrafo anterior para las uniones crecientes, partiendo ahora de que

$$F_x = \bigcap_{n=1}^\infty (F_n)_x, \qquad F^y = \bigcap_{n=1}^\infty (F_n)^y,$$

con intersecciones decrecientes en ambos casos. La única diferencia es que para usar el Teorema de la Convergencia Monótona "decreciente" debemos asegurarnos de que el primer término en cada caso es finito, lo cual se sigue de

$$\nu\big((F_1)_x\big) \le \nu(Y) < \infty, \quad \mu\big((F_1)^y\big) \le \mu(X) < \infty,$$
$$\int_X \nu\big((F_1)_x\big)\,\mathrm{d}\mu(x) \le \int_X \nu(Y)\,\mathrm{d}\mu \le \nu(Y)\mu(X) < \infty,$$
$$\int_Y \mu\big((F_1)^y\big)\,\mathrm{d}\nu(y) \le \int_Y \mu(X)\,\mathrm{d}\nu \le \mu(X)\nu(Y) < \infty,$$

puesto que hemos supuesto que las medidas μ y ν son finitas.

Veamos ahora el caso general. Puesto que los espacios de medida son σ-finitos, existen sucesiones $(X_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}$ e $(Y_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{B}$ tales que $\mu(X_n), \nu(Y_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcup_{n=1}^\infty X_n = X, \quad \bigcup_{n=1}^\infty Y_n = Y.$$

Por tanto, el espacio de medida $(X\times Y, \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}, \mu\otimes\nu)$ es σ-finito, puesto que tenemos una sucesión $(X_n \times Y_n)_{n=1}^\infty \subset \mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$ que verifica que $(\mu\otimes\nu)(X_n\times Y_n) = \mu(X_n)\nu(Y_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcup_{n=1}^\infty (X_n \times Y_n) = X \times Y.$$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $X_n \subset X_{n+1}$ e $Y_n \subset Y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que la sucesión $(X_n\times Y_n)_{n=1}^\infty$ también es monótona, $X_n\times Y_n \subset X_{n+1}\times Y_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Basta por tanto con demostrar el resultado para cada uno de los elementos de la sucesión $\big(E\cap(X_n\times Y_n)\big)_{n=1}^\infty$ y luego usar el Teorema de la Convergencia Monótona.

■

TEOREMA 4.9 (Fubini-Tonelli) *Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ espacios de medida σ-finitos.*

(i) (Tonelli) *Sea* $f : X \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *es* $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$*-medible y no negativa. Entonces:*

- *la función* $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *dada por* (4.2) *es* $\mathcal{A}$*-medible;*
- *la función* $h : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ *dada por* (4.3) *es* $\mathcal{B}$*-medible;*
- *se verifica* (4.4).

(ii) (Fubini) *Sea* $f \in L^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. *Entonces:*

- $f_x \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *para casi todo* $x \in X$, $f^y \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ *para casi todo* $y \in Y$*;*
- *las funciones* g *y* h *dadas por* (4.2) *y* (4.3) *están definidas en casi todo punto;*
- $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ *y* $h \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$*;*
- *se verifica* (4.4).

Demostración. (i) Sabemos que (4.4) se verifica $f = \mathbb{1}_E$, $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$; véase la proposición (4.8). Por linealidad, se verifica también para funciones simples no negativas. Para una f medible no negativa elegimos una sucesión no decreciente de funciones simples no negativas, $0 \leq s_n \leq s_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} s_n(x, y) = f(x, y)$ para todo $(x, y) \in X \times Y$. Sean

$$g_n(x) = \int_Y s_n(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y), \quad h_n(y) = \int_X s_n(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Cada g_n y h_n es medible, $g_n \leq g_{n+1}$, $h_n \leq h_{n+1}$ y, por el Teorema de la Convergencia Monótona,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x), \qquad \lim_{n\to\infty} h_n(y) = h(y).$$

Luego g, h son medibles por ser el límite de medibles. Nuevamente por el Teorema de la Convergencia Monótona y aplicando que el resultado es cierto para funciones simples finalmente se tiene

$$\begin{aligned}
\int_X g\,\mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_X g_n\,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \Big(\int_Y s_n(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu(x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} s_n\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu), \\
\int_Y h\,\mathrm{d}\nu &= \lim_{n\to\infty} \int_Y h_n\,\mathrm{d}\nu = \lim_{n\to\infty} \int_Y \Big(\int_X s_n(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,\mathrm{d}\nu(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} s_n\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \int_{X\times Y} f\,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu).
\end{aligned}$$

Además si la integral de f es finita entonces $g(x) < \infty$ c.t.p. x, y $h(y) < \infty$ c.t.p. y. Por tanto, $f_x \in L^1(\nu)$ para casi todo $x \in X$ y $f^y \in L^1(\mu)$ para casi todo $y \in Y$.
(ii) Se deduce de aplicar el teorema de Tonelli a las funciones positivas e integrables f^+, f^-.

■

Observaciones. (a) Hay una versión del teorema de Tonelli-Fubini para compleciones de espacios de medida producto; véase el problema 12.
(b) Los teoremas de Tonelli y Fubini se utilizan con frecuencia de forma combinada. Típicamente uno quiere invertir el orden de integración en una integral doble $\int_Y \int_X f\,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu$.

En primer lugar uno verifica que $\int_{X\times Y} |f| \,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu) < \infty$ usando el teorema de Tonelli para evaluar esta integral como una integral iterada; después se aplica el teorema de Fubini para concluir que $\int_Y \int_X f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu = \int_X \int_Y f \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu$.

Ejemplos. (a) Podemos usar el teorema de Fubini para demostrar que una función no es integrable (si las integrales iteradas son distintas la función no puede ser integrable).

Sean $X = Y = (0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{M}\big|_{(0,1]}$ (σ-álgebra de Lebesgue en $0,1]$), $\mu = \nu = m$ (medida de Lebesgue) y

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad 0 < x, y \leq 1.$$

Para todo $y \in (0,1]$ se tiene

$$\begin{aligned}
\int_{(0,1]} f_x \,\mathrm{d}\nu &= \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{x^2}\int_0^1 \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2}\,\mathrm{d}y \\
&\overset{\frac{y}{x}=\tan u}{=} \frac{1}{x}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \frac{1-\tan^2 u}{(1+\tan^2 u)^2}\frac{\mathrm{d}u}{\cos^2 u} = \frac{1}{x}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \left(\cos^2 u - \operatorname{sen}^2 u\right)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x}\int_0^{\arctan\left(\frac{1}{x}\right)} \cos(2u)\,\mathrm{d}u = \frac{\operatorname{sen}(2\arctan(\frac{1}{x}))}{2x} = \frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}$$

Veamos con más detalle el último paso. Definiendo $z = 2\arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, se tiene por un lado que $1/x = \tan(z/2)$ y por otro que $\operatorname{sen}(2\arctan(\frac{1}{x})) = \operatorname{sen} z = 2\operatorname{sen}(z/2)\cos(z/2)$. Así pues,

$$\begin{aligned}
\frac{\operatorname{sen}(2\arctan(\frac{1}{x}))}{2x} &= \operatorname{sen}(z/2)\cos(z/2)\tan(z/2) = \operatorname{sen}^2(z/2) \\
&= \frac{1}{1+\cot^2(z/2)} = \frac{1}{1+x^2},
\end{aligned}$$

como habíamos afirmado.

Por simetría obtenemos

$$\int_{(0,1]} f^y \,\mathrm{d}\mu = \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 f(y,x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Por tanto,

$$\int_{(0,1]}\int_{(0,1]} f_x \,\mathrm{d}\nu\,\mathrm{d}\mu = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4},$$

mientras que,

$$\int_{(0,1]}\int_{(0,1]} f^y \,\mathrm{d}\mu\,\mathrm{d}\nu = -\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{4}.$$

Las integrales iteradas no son iguales, y concluimos por tanto que f no es integrable.

(b) El teorema se puede usar también para aprovechar simetrías e integrar fácilmente.

Sean $(X,\mathcal{A},\mu)$ e $(Y,\mathcal{B},\nu)$ como en el ejemplo anterior, y

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}, \quad 0 < x, y \leq 1.$$

La función f es no negativa, luego, se puede integrar. Además,

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-y^2}{x^2+y^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2+y^2} = 1 - f(y,x),$$

por tanto, por el teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} I &:= \int_{[0,1]\times[0,1]} f \, \mathrm{d}(m\otimes m) = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \Big(\int_0^1 1\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(y,x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= 1 - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(y,x)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = 1 - I. \end{aligned}$$

Nótese que I no puede ser ∞, puesto que $0 \le f \le 1$. Así que podemos despejar y obtenemos que $I = 1/2$.
(c) En ocasiones uno de los dos posibles órdenes de integración ofrece ventajas frente al otro.

Calculamos la integral de $f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2}$ en el triángulo D de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(1,1)$. Puesto que $\mathbb{1}_D(x,y) = \mathbb{1}_{[0,1]}(y)\mathbb{1}_{[y,1]}(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,x]}(y)$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_D f \, \mathrm{d}(m\otimes m) &= \int_0^1 \left(\int_y^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x\mathrm{e}^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right). \end{aligned}$$

♠

4.4. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$

Partiendo del espacio de medida de Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$ podemos formar el espacio de medida producto $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes\mathcal{M}, m\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes m)$. Este espacio *no* es completo.

Contraejemplo. Consideramos el conjunto $E = A\times \overset{n-1 \text{ veces}}{\cdots} \times A \times B$, con $A \in \mathcal{M}$, $A \neq \emptyset$, tal que $m(A) = 0$ (por ejemplo, $A = \{x_0\}$) y $B \subset \mathbb{R}$, $B \notin \mathcal{M}$ (por ejemplo, el conjunto de Vitali). Sabemos que $E \notin \mathcal{M}\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes\mathcal{M}$, pues en caso contrario se tendría que $B \in \mathcal{M}$, por ser B una sección de E. Sin embargo, $E \subset F := A\times \overset{n-1 \text{ veces}}{\cdots} \times A \times \mathbb{R}$ y, puesto que F es un rectángulo medible, $F \in \mathcal{M}\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes\mathcal{M}$ y $(m\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes m)(F) = m(A) \overset{n \text{ veces}}{\cdots} m(A)m(\mathbb{R}) = 0$. ♠

El espacio de medida de Lebesgue será la compleción de este espacio de medida producto.

DEFINICIÓN 4.5 *El* espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$*, es la compleción del espacio de medida producto* $(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes\mathcal{M}, m\otimes \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \otimes m)$.

Notación. Cuando la dimensión está clara por el contexto se suele suprimir el subíndice n. También es frecuente la notación $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, \lambda_n)$.

PROPOSICIÓN 4.10 (Propiedades del espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$)

(i) $\mathcal{M}_n$ *contiene a los abiertos de* $\mathbb{R}^n$*, y por tanto a la* σ*-álgebra de Borel* $\mathbb{B}_{\mathbb{R}^n}$ *(la* σ*-álgebra generada por los abiertos).*

(ii) $m_n(A) = \text{ínf}\,\{\sum_{i=1}^{\infty}|R_i| : R_i$ *rectángulos medibles disjuntos tales que* $\bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \supset A\}$ *para todo* $A \in \mathcal{M}_n$*. Los rectángulos medibles se pueden sustituir por cubos.*

(iii) *La medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *es regular:*

$$m(A) = \text{ínf}\{m(U) : A \subset U,\ U \text{ abierto }\}, \quad m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A,\ K \text{ compacto}\}.$$

(iv) *La medida de Lebesgue en* $\mathbb{R}^n$ *es invariante por traslaciones:*

$$A \in \mathcal{M}_n,\ x_0 \in \mathbb{R}^n \quad \Longrightarrow \quad x_0 + A \in \mathcal{M}_n,\ m(x_0 + A) = m(A).$$

(v) *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función* $\mathcal{M}_n$*-medible. Si* $f \geq 0$ *o* $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$*, entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x_0 + x)\,\mathrm{d}m_n = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}m_n \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Demostración. (i) Es consecuencia de que todo abierto se puede escribir como unión numerable disjunta de cubos de la forma $Q = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$ con $J_k = (a_k, a_k + h]$, un hecho que se deja como ejercicio. Estos cubos pertenecen a $\mathcal{M}_n$, por ser rectángulos medibles, y por tanto también sus uniones numerables y en particular los abiertos.
(ii) Se sigue del hecho de que la compleción de un espacio de medida es el menor espacio de medida completo que lo contiene. Los detalles se dejan como ejercicio.
(iii) La demostración es la misma que para el caso $n = 1$; véase el ejercicio 25 del capítulo **??**.
(iv) Por (ii), basta suponer que A es un cubo. En ese caso el resultado se sigue trivialmente de la invariancia por traslaciones de la medida de Lebesgue en dimensión 1.
(v) Por un argumento de aproximación, basta con demostrar el resultado para $f = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{M}_n$. En este caso $f(x + x_0) = \mathbb{1}_A(x + x_0) = \mathbb{1}_{(-x_0+A)}(x)$, y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x + x_0)\,\mathrm{d}m_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{(-x_0+A)}\,\mathrm{d}m_n = m_n(-x_0 + A) = m_n(A) = \int_{\mathbb{R}^n} f\,\mathrm{d}m_n.$$

■

TEOREMA 4.11 (i) *Si* $A \in \mathcal{M}_n$ *y* $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, entonces* $cA \in \mathcal{M}_n$ *y* $m_n(cA) = |c|^n m_n(A)$*.*

(ii) *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *medible. Si* $f \geq 0$ *o* $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$*, para todo* $c \neq 0$ *se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(cx)\,\mathrm{d}m_n(x) = \frac{1}{|c|^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}m_n(x).$$

Demostración. (i) Si A es un cubo, cA también lo es y $m_n(cA) = |c|^n m_n(A)$. De aquí el resultado se extiende a abiertos, puesto que se pueden escribir como unión numerable disjunta de cubos y, por la regularidad de m_n, a todo $A \in \mathcal{M}_n$.
(ii) Por un argumento de aproximación, basta con demostrar el resultado para el caso particular en que $f = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{M}_n$. Ahora bien, $\mathbb{1}_A(cx) = \mathbb{1}_{\frac{1}{c}A}(x)$, y por tanto

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_A(cx)\, \mathrm{d}m_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\frac{1}{c}A}(x)\, \mathrm{d}m_n(x) = m_n\Big(\frac{1}{c}A\Big) = \frac{1}{|c|^n} m_n(A).$$

■

TEOREMA 4.12 (Cambio de variable para aplicaciones lineales) *Sean* $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *lineal y regular* ($\det(T) \neq 0$) *y* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *medible tal que* $f \geq 0$ *o* $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$.

(i) *Si* $A \in \mathcal{M}_n$, *entonces* $T(A) \in \mathcal{M}_n$ *y* $m_n(T(A)) = |\det(T)| m_n(A)$. *En particular,* $m_n(T(A)) = m_n(A)$ *si* T *es una rotación.*

(ii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f\, \mathrm{d}m_n = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)\, \mathrm{d}m_n.$

(iii) *Si* D *es un conjunto medible, entonces* $\displaystyle\int_{T(D)} f\, \mathrm{d}m_n = |\det(T)| \int_D (f \circ T)\, \mathrm{d}m_n.$

Demostración. (i) Basta con demostrar el resultado para cubos de la forma $Q = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$ con $J_k = (b_k, b_k + c]$. Para ello usamos que $Q = cQ_0 + b$, con $b = (b_1, \ldots, b_n)$, siendo Q_0 el cubo $(0,1]^n$. Es un ejercicio fácil comprobar que $m_n(T(Q_0)) = |\det(T)| = |\det(T)| m_n(Q_0)$ (probablemente ya viste este resultado en el curso de álgebra Lineal y Geometría). Por consiguiente, usando que T es lineal y la invariancia de la medida de Lebesgue bajo traslaciones,

$$\begin{aligned} m_n(T(Q)) &= m_n(cT(Q_0) + Tb) = m_n(cT(Q_0)) = |c|^n m_n(T(Q_0)) = |c|^n |\det(T)| m_n(Q_0) \\ &= |\det(T)| m_n(cQ_0) = |\det(T)| m_n(cQ_0 + b) = |\det(T)| m_n(Q). \end{aligned}$$

(ii) Basta con demostrar el resultado para $f = \mathbb{1}_A$ con $A \in \mathcal{M}_n$. En este caso $(f \circ T)(x) = \mathbb{1}_A(Tx) = \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}(x)$, de forma que, aplicando el apartado (i),

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ T)\, \mathrm{d}m_n = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{T^{-1}(A)}\, \mathrm{d}m_n = m_n(T^{-1}(A)) = \frac{m_n(A)}{|\det(T)|} = \frac{1}{|\det(T)|} \int_{\mathbb{R}^n} f\, \mathrm{d}m_n.$$

(iii) Sea $g = f \mathbb{1}_{T(D)}$. Entonces $(g \circ T)(x) = (f \circ T)(x) \mathbb{1}_D(x)$ y aplicando el apartado (ii) se tiene

$$\int_{T(D)} f\, \mathrm{d}m_n = \int_{\mathbb{R}^n} g\, \mathrm{d}m_n = |\det(T)| \int_{\mathbb{R}^n} (g \circ T)\, \mathrm{d}m_n = |\det(T)| \int_D (f \circ T)\, \mathrm{d}m_n.$$

■

Nuestro siguiente objetivo es extender el resultado anterior a cambios de variables no necesariamente lineales.

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ una aplicación de Ω en $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son de clase C^1. Denotamos por $D_x\varphi$ es a la aplicación lineal dada por la matriz $A_x = ((\partial\varphi_i/\partial x_j)(x))$ de las derivadas parciales de φ en x. Nótese que si φ es lineal entonces $D_x\varphi = \varphi$. El *jacobiano* de φ en x, $J_\varphi(x)$, es el determinante de esta matriz $J_\varphi(x) = \det(A_x) = \det(D_\varphi(x))$. La aplicación φ es un *difeomorfismo* C^1 si es inyectiva y $D_x\varphi$ es invertible para cada $x \in \Omega$. En este caso el Teorema de la función inversa garantiza que $\varphi^{-1} : \varphi(\Omega) \to \Omega$ es también un difeomorfismo C^1 y que $D_x(\varphi^{-1}) = (D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi)^{-1}$ para todo $x \in \varphi(\Omega)$. En particular, $J_{\varphi^{-1}}(x)J_\varphi(\varphi^{-1}(x)) = 1$.

El *Teorema del cambio de variable* permite sustituir la aplicación T del teorema (4.12) por cualquier difeomorfismo C^1.

TEOREMA 4.13 (Teorema del cambio de variable) *Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo C^1 sobre el abierto Ω, y sea $f : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ medible Lebesgue. Si $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, m_n)$, entonces*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f \,\mathrm{d}m_n = \int_\Omega (f \circ \varphi)|J_\varphi| \,\mathrm{d}m_n.$$

La demostración del teorema se puede formular en términos de la noción de medida inducida.

DEFINICIÓN 4.6 *Dados dos espacios medibles $(X, \mathcal{A}_X)$ e $(Y, \mathcal{A}_Y)$ se dice que $\varphi : X \to Y$ es* medible *con respecto a $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_Y$ si $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X$ para todo $B \in \mathcal{A}_Y$.*

Una medida en $\mathcal{A}_X$ y una función de X en Y medible con respecto a $\mathcal{A}_X$ y $\mathcal{A}_Y$ *inducen* una medida en $\mathcal{A}_Y$.

LEMA 4.14 *Sean $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ un espacio de medida, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ un espacio medible y $\varphi : X \to Y$ una función medible. Entonces, $\mu_\varphi : \mathcal{A}_Y \to [0, \infty]$ dada por $\mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ es una medida, que se conoce como* medida inducida *por μ y φ.*

Demostración. Véase el ejercicio 3 del capítulo **??**.■

TEOREMA 4.15 *Sean $(X, \mathcal{A}_X, \mu)$ un espacio de medida, $(Y, \mathcal{A}_Y)$ un espacio medible y $\varphi : X \to Y$ una función medible. Si $f : Y \to \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}_Y$-medible y $f \geq 0$ o $f \in L^1(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_\varphi)$, entonces $f \circ \varphi$ es $\mathcal{A}_X$-medible y*

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu_\varphi = \int_X (f \circ \varphi) \,\mathrm{d}\mu.$$

Demostración. Por ser f una función $\mathcal{A}_Y$-medible, $\{y \in Y : f(y) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}_Y$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. Por consiguiente,

$$\{x \in X : (f \circ \varphi)(y) \geq \alpha\} = \varphi^{-1}(\{y \in Y : f(y) \geq \alpha\}) \in \mathcal{A}_X \quad \text{para todo } \alpha \in \mathbb{R},$$

puesto que φ es medible, y por tanto $f \circ \varphi$ es $\mathcal{A}_X$-medible.

Para demostrar la identidad, gracias a un argumento de aproximación basta con demostrarla para $f = \mathbb{1}_B$ con $B \in \mathcal{A}_Y$. Esto es inmediato, puesto que $f \circ \varphi = \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)}$ y, por tanto,

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\mu_\varphi = \mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \int_X \mathbb{1}_{\varphi^{-1}(B)} \,\mathrm{d}\mu = \int_X (f \circ \varphi) \,\mathrm{d}\mu.$$

■ *Observación.* Este resultado es un teorema de cambio de variables donde la parte "más difícil", la identidad $\mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$, *se cumple por definición de la medida inducida* μ_φ.

Volvamos al Teorema del cambio de variable. En primer lugar observamos que si demostramos la desigualdad

$$\int_{\varphi(\Omega)} f \, \mathrm{d}m_n \leq \int_\Omega (f \circ \varphi)|J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n \tag{4.5}$$

para todo difeomorfismo C^1, la desigualdad contraria es inmediata aplicando el resultado a φ^{-1}. En efecto, si $g = (f \circ \varphi)|J_\varphi|$, se tiene

$$\int_\Omega (f \circ \varphi)|J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n = \int_{\varphi^{-1}(\varphi(\Omega))} g \, \mathrm{d}m_n \overset{(4.5)}{\leq} \int_{\varphi(\Omega)} (g \circ \varphi^{-1})|J_{\varphi^{-1}}| \, \mathrm{d}m_n = \int_{\varphi(\Omega)} f \, \mathrm{d}m_n.$$

Para demostrar (4.5) basta con hacerlo para $f = \mathbb{1}_A$, con $A \subset \varphi(\Omega)$ medible. Es decir, tomando $B = \varphi^{-1}(A)$, el teorema se reduce a demostrar

$$m_n(\varphi(B)) \leq \int_B |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n \quad \text{para todo } B \subset \Omega \text{ medible.} \tag{4.6}$$

La demostración de esta desigualdad se da al final del capítulo, en un apéndice, y está basada en la idea de que φ se puede aproximar por su diferencial.
Observación. Si se tiene la desigualdad (4.6) para todo difeomorfismo C^1, se tiene la igualdad

$$m_n(\varphi(B)) = \int_B |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n;$$

es decir, m_n coincide con la medida inducida μ_φ, con $\mu(B) = \int_B |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n$.

Las coordenadas no lineales más importantes en $\mathbb{R}^2$ son las *coordenadas polares*, dadas por la aplicación

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos\theta, r \operatorname{sen}\theta),$$

que transforma el rectángulo $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x > 0\}$. Como

$$J_\varphi(r, \theta) = \left| \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -r\operatorname{sen}\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \right|,$$

se tiene $|J_\varphi(r, \theta)| = r$. Nótese que $E := \{(x, 0) : x > 0\}$ tiene medida 0, $m_2(E) = 0$. Por tanto, para f medible con $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f \, \mathrm{d}m_2 = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus E} f \, \mathrm{d}m_x &\overset{\text{TCV}}{=} \int_{(0,\infty)\times(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r \, \mathrm{d}m(r, \theta) \\
&\overset{\text{T. Fubini}}{=} \int_{(0,\infty)} \int_{(0,2\pi)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r \, \mathrm{d}m(\theta) \, \mathrm{d}m(r) \\
&= \int_{(0,2\pi)} \int_{(0,\infty)} f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) r \, \mathrm{d}m(r) \, \mathrm{d}m(\theta).
\end{aligned}$$

Este cambio de coordenadas es muy útil cuando el dominio de integración involucra círculos o cuando la función a integrar tiene simetría radial.

Ejemplos. (a) Sea el dominio $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2,\ x,y \geq 0\}$ y la función $f(x,y) = xy$. Calculamos su integral en el dominio D, usando que la integral de Riemann y la de Lebesgue coinciden para funciones integrables Riemann,

$$\begin{aligned}\int_D f \,\mathrm{d}m_2 &= \int_{(0,R)} \int_{(0,\frac{\pi}{2})} (r\cos\theta)(r\operatorname{sen}\theta) r \,\mathrm{d}m(r)\,\mathrm{d}m(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \,\mathrm{d}\theta = \frac{R^4}{8}.\end{aligned}$$

(b) Sea el dominio $D = \mathbb{R}^2$ y la función $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Calculamos su integral

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}m(x,y) &= \int_{(0,\infty)} \int_{(0,2\pi)} \mathrm{e}^{-r^2} r \,\mathrm{d}m(r)\,\mathrm{d}m(\theta) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2} r \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\theta = \pi.\end{aligned}$$

♠

El análogo en $\mathbb{R}^3$ son las coordenadas esféricas, dadas por el difeomorfismo

$$\varphi(\rho,\alpha,\beta) = (\rho\operatorname{sen}\beta\cos\alpha, \rho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha, \rho\cos\beta),$$

que trasforma el rectángulo $(0,\infty)\times(0,2\pi)\times(0,\pi)$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{conjunto de medida cero}\}$. Como

$$J_\varphi(\rho,\alpha,\beta) = \left| \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\beta\cos\alpha & \operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha & \cos\beta \\ -\rho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha & \rho\operatorname{sen}\beta\cos\alpha & 0 \\ \rho\cos\beta\cos\alpha & \rho\cos\beta\operatorname{sen}\alpha & -\rho\operatorname{sen}\beta \end{pmatrix} \right|,$$

se tiene

$$|J_\varphi(\rho,\alpha,\beta)| = |-(\rho^2\cos^2\beta\operatorname{sen}\beta + \rho^2\operatorname{sen}^3\beta)| = \rho^2\operatorname{sen}\beta.$$

Por tanto, para f medible, $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$, el teorema nos dice entonces que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \,\mathrm{d}m_3 = \int_{(0,\pi)} \int_{(0,2\pi)} \int_{(0,\infty)} \tilde{f}(\rho,\alpha,\beta)\rho^2\operatorname{sen}\beta \,\mathrm{d}m(\rho)\mathrm{d}m(\alpha)\mathrm{d}m(\beta),$$

donde $\tilde{f}(\rho,\alpha,\beta) = f(\rho\operatorname{sen}\beta\cos\alpha, \rho\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha, \rho\cos\beta)$. El cambio es útil para funciones esféricas o regiones esféricas.

4.5. Problemas

1. Demostrar que:

   a) Toda σ-álgebra es clase mónotona.

   b) La intersección de clases monótonas es clase monótona.

2. (Difícil) Demostrar el *Lema de Clases Monótonas*: si $\mathcal{A}$ es un álgebra de subconjuntos de X, entonces la clase monótona $\mathcal{C}$ generada por $\mathcal{A}$ coincide con la σ-álgebra $\mathcal{M}$ generada por $\mathcal{A}$.

3. Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Demostrar que $\mu \otimes \nu$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si definimos
$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n+1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$
comprobar que $\displaystyle\int_{X \times Y} |f| \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \infty$ y que las integrales iteradas
$$\int_Y \Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu \Big) \, \mathrm{d}\nu, \qquad \int_X \Big(\int_Y f \, \mathrm{d}\nu \Big) \, \mathrm{d}\mu$$
existen y son distintas.

4. Sea $a_{mn} \geq 0$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Demostrar que
$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{mn} \ (\leq +\infty).$$

5. Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sean $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$-medible, $g : Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B}$-medible y $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ definida mediante $h(x,y) = f(x)g(y)$.

   a) Demostrar que h es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ medible.

   b) Si $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $g \in L^1(Y, \mathcal{B}, \nu)$, demostrar que $h \in L^1(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ y además
$$\int_{X \times Y} h \, \mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \Big(\int_X f \, \mathrm{d}\mu \Big) \Big(\int_Y g \, \mathrm{d}\nu \Big).$$
   Sugerencia: Empezar con funciones simples.

6. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{A}$-medible, $f \geq 0$ y sea $A_f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

   a) Demostrar que $A_f \in \mathcal{A} \otimes \mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ ($\mathbb{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$).
   Sugerencia: Empezar con f simple.

   b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{A})$ σ-finita, demostrar que $\displaystyle\int_X f \, \mathrm{d}\mu$ coincide con la medida producto $\pi = \mu \otimes m$ del conjunto A_f (aquí m es la medida usual de Lebesgue).

7. Sea $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathbb{B}_{[0,1]}$ (σ-álgebra de Borel en $[0,1]$), μ la medida de Lebesgue en $\mathcal{A}_1$, ν la medida de contar en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x,y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y que $(\mu \otimes \nu)(V) = +\infty$. Sin embargo
$$\int_Y \Big(\int_X \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\mu \Big) \, \mathrm{d}\nu = 0, \qquad \int_X \Big(\int_Y \mathbb{1}_V \, \mathrm{d}\nu \Big) \, \mathrm{d}\mu = 1.$$

Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ-finitas no se puede quitar del enunciado del Teorema de Fubini.

Sugerencia: Si $V_n = (I_n^1 \times I_n^1) \cup \cdots \cup (I_n^{2^n} \times I_n^{2^n})$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots, 2^n$, entonces $V = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$.

8. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(x - y)g(y)$ es integrable en y para casi todo x. Para estos valores de x, definimos

$$h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\, \mathrm{d}m(y).$$

Se dice que h es *la convolución* de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h|\, \mathrm{d}m$.

9. Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1,1] \times [-1,1]$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

10. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida σ-finito arbitrario. Sea ν la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

    a) Usar el Teorema de Tonelli en el espacio producto $(X \times \mathbb{N}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu \otimes \nu)$ para demostrar el Teorema de la Convergencia Monótona en el espacio $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

    b) Usar el Teorema de Fubini en el espacio producto $(X \times \mathbb{N}, \mathcal{A} \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu \otimes \nu)$ para demostrar el Teorema de la Convergencia Dominada para series: dada una sucesión $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de funciones en X con valores reales $\mathcal{A}$-medibles, si $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n| \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, entonces

$$\int_X \Big(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \Big)\, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\int_X g_n\, \mathrm{d}\mu \Big).$$

11. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida y $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ su compleción. Sea f una función $\overline{\mathcal{A}}$-medible en X. Demostrar que hay una función $\mathcal{A}$-medible g tal que $f = g$ en casi todo punto respecto a la medida $\overline{\mu}$.

12. (Teorema de Tonelli-Fubini para compleciones) Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos y completos, y sea $(X \times Y, \mathcal{L}, \lambda)$ la compleción de $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$. Demostrar que si f es $\mathcal{L}$-medible y (i) $f \geq 0$ o (ii) $f \in L^1(\lambda)$, entonces:

    a) f_x es $\mathcal{B}$-medible para casi todo x y f^y es $\mathcal{A}$-medibles para casi todo y. Además, en el caso (b) f_x y f^y son también integrables para casi todo x e y respectivamente;

b) las funciones $x \to \int_{\mathbb{Y}} f_x \, \mathrm{d}\nu$ e $y \to \int_{\mathbb{X}} f^y \, \mathrm{d}\mu$ son medibles, y en el caso (b) también integrables y

$$\int_{X\times Y} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_Y \Big(\int_X f^y \, \mathrm{d}\mu \Big) \, \mathrm{d}\nu = \int_X \Big(\int_Y f_x \, \mathrm{d}\nu \Big) \, \mathrm{d}\mu.$$

Indicación. Usar el problema 11 y el teorema de Tonelli-Fubini estándar para reducirse al caso en que $f = 0$ en casi todo punto respecto a la medida λ.

13. Usar el teorema de Fubini para demostrar que $\displaystyle\lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau \frac{\operatorname{sen} x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.

Indicación. Usar la identidad $\displaystyle\frac{1}{x} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy} \, \mathrm{d}y$, válida para todo $x > 0$.

14. Demostrar que todo abierto de $\mathbb{R}^n$ es unión numerable disjunta de cubos de la forma $Q = J_1 \times J_2 \times \cdots \times J_n$ con $J_k = (b_k, b_k + c]$ con $b = (b_1, \ldots, b_k) \in \mathbb{R}^n$ y $c \in (0, \infty)$.

15. Sea ν la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \operatorname{card}(A \cap \mathbb{Z}^2) \quad \text{para todo } A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, ν es la medida que "cuenta" el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x, y) = \mathrm{e}^{x^2+y^2}$. Si ν_ϕ es la medida inducida por ν y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\nu_\phi([1, \mathrm{e}])$ y $\nu_\phi((\mathrm{e}^2, \mathrm{e}^3])$.

16. Si consideramos en $X = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$ la medida de área de Lebesgue habitual, m, y si $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$, o $\varphi(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, demostrar que las medidas inducidas m_φ son medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ y encontrar, en cada caso, la función de distribución.

17. Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y m_2 la medida de Lebesgue en X. Definimos $\Phi : X \to \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m_2 en $\mathbb{R}$.

   a) Calcular el valor de $m_\Phi([0, 1])$.

   b) Demostrar que existe una función W tal que $m_\Phi(E) = \int_E W \, \mathrm{d}m_1$ para todo $E \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue, donde m_1 es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Encontrar W explícitamente.

18. Se considera sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^2$ la medida de Lebesgue m_2 y la función $\phi : \mathbb{R}^2 \to (0, 1]$ dada por $\phi(x, y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Si m_ϕ denota la medida inducida por ϕ y m_2 sobre los conjuntos de Borel de $(0, 1]$:

   a) Demostrar que $m_\phi([a, b]) = \pi \log(b/a)$ si $0 < a < b \leq 1$.

   b) Deducir que para todo conjunto de Borel $A \subset (0, 1]$ se tiene $m_\phi(A) = \pi \displaystyle\int_A \frac{1}{t} \, \mathrm{d}m_1(t)$, donde m_1 es la medida de Lebesgue en $(0, 1]$.

4.6. Apéndice: Demostración de la desigualdad (4.6)

LEMA 4.16 *Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo C^1. Para todo $B \subset \Omega$ medible*

$$m_n(\varphi(B)) \leq \int_B |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n. \tag{4.7}$$

Demostración. Empezamos demostrando el resultado para cubos $Q \subset \Omega$.

Por el Teorema de Taylor,

$$\varphi(x+u) = \varphi(x) + D_x\varphi(u) + o(|u|).$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\tilde{Q}$ cubo centrado en el origen tal que para todo $x \in Q$ y para todo $u \in \tilde{Q}$ se tiene

$$\varphi(x+u) \in \varphi(x) + D_x\varphi\left((1+\varepsilon)\tilde{Q}_u\right),$$

donde $\tilde{Q}_u$ es el mínimo cubo centrado en el origen que contiene a u. Dividimos Q en cubos casi-disjuntos Q_j

$$Q = \bigcup_{j=1}^{2^{kN}} Q_j,$$

de lado menor que $\tilde{Q}$. Si x_j es el centro de Q_j, entonces $Q_j - x_j \subset \tilde{Q}$ y, por tanto, si $x_j + u \in Q_j$,

$$\varphi(x_j + u) \in \varphi(x_j) + D_{x_j}\varphi\left((1+\varepsilon)(Q_j - x_j)\right).$$

En particular,

$$\varphi(Q_j) \subset \varphi(x_j) + D_{x_j}\varphi\left((1+\varepsilon)(Q_j - x_j)\right),$$

y deducimos, por el resultado para aplicaciones lineales,

$$m_n(\varphi(Q_j)) \leq |J(x_j)|(1+\varepsilon)^k |Q_j|.$$

Es decir,

$$m_n(\varphi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^k \sum_{j=1}^{2^{kN}} |J(x_j)| \cdot |Q_j|.$$

La parte de la derecha es la suma de Riemann asociada a la partición $\{Q_j\}_{j=1}^{2^N}$ de $|J|$. Tomando particiones mas finas queda

$$m_n(\varphi(Q)) \leq (1+\varepsilon)^k \int_Q |J| \, \mathrm{d}m_n.$$

Como ε es arbitrario, obtenemos

$$m_n(\varphi(Q)) \leq \int_Q |J| \, \mathrm{d}m_n.$$

Del resultado para cubos se deduce el resultado para abiertos, porque todo abierto U es unión numerable disjunta de cubos $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ y por tanto

$$m_n(\varphi(U)) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} m_n(\varphi(Q_j)) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_{Q_j} |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n = \int_U |J_\varphi(x)| \, \mathrm{d}m_n.$$

Para demostrar el resultado para un $B \subset \Omega$ medible arbitrario podemos suponer que B es acotado y que $\overline{B} \subset \Omega$. En caso contrario, si escribimos Ω como unión casi-disjunta de cubos cerrados $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j$ se tiene $B = \bigcup_{j\in\mathbb{N}}(B \cap Q_j)$, cada $B_j = B \cap Q_j$ es acotado, $\overline{B_j} \subset Q_j \subset \Omega$ y si lo probamos para B_j, el argumento anterior lo da para B.

Si B es acotado, hay una cadena decreciente de abiertos $U_k \supset U_{k+1} \supset B$ para todo $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_n(B) = \lim_{k\to\infty} m_n(U_k)$. Podemos suponer que U_1 es acotado y $\overline{U_1} \subset \Omega$. Por tanto, la función $|J_\varphi|$ es acotada en U_1, y el Teorema de la Convergencia Dominada nos da

$$m_n(\varphi(B)) \leq \lim_{k\to\infty} m_n(\varphi(U_k)) \leq \lim_{k\to\infty} \int_{U_k} |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n = \int_B |J_\varphi| \, \mathrm{d}m_n. \qquad \blacksquare$$

Capítulo 5

Medidas y derivadas

En este capítulo estudiaremos la relación que existe entre integración y derivación y determinaremos en qué sentido una operación es la inversa de la otra.

Recordamos primero algunos resultados clásicos de la integración Riemann:

- Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable Riemann. Entonces, la función

  $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(u)du$ es continua.

TEOREMA 5.1 (Teorema Fundamental del cálculo, Newton-Leibniz) -

1. *Sean f y F como en el apartado 1. Si f es continua en x_0, entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.*

2. *Sea $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1. Entonces se tiene: $F(a) + \displaystyle\int_a^x F'(u)du = F(x)$.*

5.1. Derivación dentro del signo integral

TEOREMA 5.2 *Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $f : X \times [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $f^t \in L^1(d\mu)$ $\forall t$ y definamos*

$$F(t) = \int_X f^t(x)d\mu(x) = \int_X f(x, t)d\mu(x).$$

1. *Si f_x es continua en t_0 $\forall x$, y $\exists g \in L^1(d\mu)$ tal que $|f^t(x)| \leq g(x), \forall x, \forall t$, entonces F es continua en t_0.*

2. *Si $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ $\forall t$ y $\exists g \in L^1(d\mu)$ con $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g(x)$ $\forall t$, $\forall x$, entonces $\exists F'(t)$ y se tiene:*

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_X f(x, t)d\mu(x)\right) = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t}d\mu(x).$$

La demostración en ambos casos es una consecuencia del T.C.D.

Demostración:

1. Sea $\{t_n\}$ una sucesión arbitraria que converge a t_0. Definimos $g_n(x) = f^{t_n}(x)$. Si f_x es continua en t_0, $\forall x$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x,t_n) = f(x,t_0) \quad \forall x$$

Como además $|g_n(x)| \leq g(x) \in L^1(d\mu)$, $\forall n$, por el TCD,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} F(t_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X g_n(x)d\mu(x) \overset{T.C.D.}{=} \int_X f(x,t_0)d\mu(x) = F(t_0)$$

luego F es continua en t_0.

2. Sea de nuevo $t_n \longrightarrow t_0$ arbitraria ($t_n \neq t_0$), definimos:

$$h_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$$

h_n es medible y $\exists \lim_{n\longrightarrow\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$, que es medible.

Por el teorema del valor medio, $\forall x$, $\exists s$ tal que $h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)$ y, por hipótesis, deducimos $|h_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \, \forall x$.

Aplicando de nuevo el TCD, concluimos,

$$F'(t_0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{F(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X h_n(x)d\mu(x) \overset{T.C.D.}{=} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)d\mu(x).$$

Q.E.D.

5.2. El Teorema de diferenciación de Lebesgue

Veamos a continuación la extensión natural del apartado 1 del Teorema Fundamental del Cálculo

TEOREMA 5.3 (Teorema de diferenciación de Lebesgue) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ y definimos $F(x) = \int_a^x f(u)du$, entonces F es diferenciable en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue [escribimos c.t.p.(dx)] y además $F'(x) = f(x)$ en c.t.p. (dx).*

DEFINICIÓN 5.1 *Dada $f \in L^1(d\mu)$ se define el **conjunto de puntos de Lebesgue de** f, denotado $\mathcal{L}_f$, como:*

$$\mathcal{L}_f = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(u) - f(x_0)|du = 0 \right\}$$

Ejercicio: Probar que si f es continua entonces $\mathcal{L}_f = \mathbb{R}$ (es decir, todo $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto de Lebesgue de una función continua).

Demostración del Teorema de diferenciación de Lebesgue.

Se trata de probar que

$$F'(x) = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du = \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} f(u)du = f(x) \qquad c.t.p.\ (dx),$$

pero esto es lo mismo que

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(u)-f(x))du = 0 \qquad c.t.p.\ (dx),$$

$$\lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} (f(u)-f(x))du = 0 \qquad c.t.p.\ (dx).$$

Como

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} (f(u)-f(x))du\right| \le \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} |f(u)-f(x)|\, du,$$

$$\left|\frac{1}{h}\int_{x-h}^{x} (f(u)-f(x))du\right| \le \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} |f(u)-f(x)|\, du,$$

el resultado se sigue de probar que la medida de Lebesgue de $\mathcal{L}_f^c$ es cero ($|\mathcal{L}_f^c| = 0$); es decir, que c.t.p. x es punto de Lebesgue de f.

Sea, para $h > 0$,

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} |f(u)-f(x)|du.$$

Queremos ver que

$$\limsup_{h\longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) = 0, \qquad c.t.p.\ x$$

(y el resultado es cierto, por el ejercicio anterior, para funciones continuas, $\forall x$.)

Como

$$\left\{x\in\mathbb{R}\ :\ \limsup_{h\longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\limsup_{h\longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \frac{1}{n}\right\},$$

basta probar que dado $\lambda > 0$ cualquiera, el conjunto

$$A_\lambda = \left\{x\in\mathbb{R}\ :\ \limsup_{h\longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \lambda\right\},$$

tiene medida cero.

Para ello definimos el siguiente **Operador de Hardy-Littlewood**:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u)| du,$$

y usaremos los siguientes resultados:

TEOREMA 5.4 (Desigualdad de Hardy-Littlewood) *Si $f \in L^1$ y $\lambda > 0$, se tiene*

$$|\{x \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int |f(x)| dx.$$

LEMA 5.5 (Aproximación por funciones continuas) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ continua, tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Para terminar con la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue, tomamos una función continua (e integrable) g cualquiera. Se tiene

$$m_h(f)(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - g(u)| du + \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |g(u) - g(x)| du + |g(x) - f(x)|.$$

Tomando límites

$$\limsup_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) \leq \mathcal{M}(f - g)(x) + |f(x) - g(x)|.$$

Por tanto

$$A_\lambda \subset \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{M}(f-g) > \frac{\lambda}{2} \right\} \bigcup \left\{ x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x) - g(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}.$$

Usando las desigualdades de Hardy-Littelwood y Chebychev

$$|A_\lambda| \leq \frac{2}{\lambda/2} \int |f - g| dx + \frac{1}{\lambda/2} \int |f - g| dx = \frac{6}{\lambda} \int |f - g| dx$$

y esto para cualquier función g continua e integrable. Usando ahora el lema de aproximación, dado $\varepsilon > 0$, elegimos g continua e integrable tal que

$$\int |f - g| dx \leq \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{6}$$

De esta forma obtenemos $|A_\lambda| \leq \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0$, y por tanto $|A_\lambda| = 0$.

Q.E.D.

Demostración de la desigualdad de Hardy-Littlewood.

Si $\mathcal{M}f(x) > \lambda$, entonces existe un intervalo abierto I centrado en x ($I = (x-h, x+h)$) tal que

$$(\star) \qquad \frac{1}{|I|}\int_I |f|du > \lambda.$$

(En particular $|I| < \dfrac{1}{\lambda}\displaystyle\int_I |f|du$).

Por tanto

$$\{x \ : \ \mathcal{M}f(x) > \lambda\} \subset \bigcup \left\{ I \ : \ \frac{1}{|I|}\int_I |f|du > \lambda \right\} = D_\lambda,$$

y basta probar $|D_\lambda| \leq \dfrac{2}{\lambda}\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f|du$.

Como la medida de Lebesgue es regular, es suficiente probar que para todo K, compacto, $K \subset D_\lambda$, se tiene

$$|K| \leq \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|du.$$

Pero si $K \subset D_\lambda$ es compacto, existe un número finito de intervalos $I_1, I_2, ..., I_N$ que cumplen $(\star)$ y tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j.$$

Podemos suponer que ningún I_j está contenido en la unión de los otros. Además los ordenamos de forma que si $I_j = (a_j, b_j)$ entonces $a_1 < a_2 < ... < a_N$.

Es fácil ver que en esta situación las familias $\{I_j\}_j$, j par e $\{I_j\}_j$, j impar, son de intervalos disjuntos. Deducimos entonces que cada punto $x \in \mathbb{R}$ está como mucho en dos intervalos I_j, es decir $\sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x) \leq 2$
Finalmente

$$|K| \leq \sum_{j=1}^{N} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda}\int_{I_j} |f|du = \frac{1}{\lambda}\int_{I_j} |f| \sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(u)du \leq \frac{2}{\lambda}\int_{\mathbb{R}} |f|du, \qquad \mathbf{Q}.E.D.$$

Demostración del lema de aproximación por funciones continuas.

Sea $f \in L^1(dx)$. Podemos suponer que $f \geq 0$ (en caso contrario, aplicamos el resultado a cada una de las funciones f^+, f^-).

Sabemos que entonces f es un límite de funciones simples positvas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq s_n \leq s_{n+1} \leq ... \longrightarrow f$ de forma que $\int f dx = \lim_{n\to\infty} \int s_n dx$ y por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple $0 \leq s \leq f$ tal que

$$\int |f - s|dx = \int (f - s)dx = \int f dx - \int s dx < \varepsilon.$$

Así que basta aproximar funciones simples por continuas y, por consiguiente, basta aproximar funciones características de medibles por funciones continuas porque si $s = \sum_{j=1}^{N} c_j \chi_{A_j}$ es simple, con χ_{A_j} integrable ($|A_j| < \infty$) y g_i es una función continua que aproxima bien a χ_{A_j} entonces $\sum_{j=1}^{N} c_j g_j(x)$ es una función que aproxima bien a s.

Queremos probar entonces que si A es medible Lebesgue, $|A| < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe una función continua g tal que

$$\int |\chi_A(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Como la medida de Lebesgue es regular, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists U$ abierto, K compacto, tales que $K \subset A \subset U$ y $|U \setminus K| < \varepsilon$. Veamos que existe una función continua g tal que

$$\begin{cases} 0 \leq g(x) \leq 1, & \forall\, x \\ g(x) = 1, & x \in K \\ g(x) = 0, & x \in U \end{cases}$$

es decir, $\chi_K(x) \leq g(x) \leq \chi_U(x)$. De aquí se deduce $|\chi_A(x) - g(x)| \leq \chi_U(x) - \chi_K(x)$ y por tanto

$$\int |\chi_A(x) - g(x)| dx \leq |U \setminus K| < \varepsilon.$$

Para construir g, observamos que K está contenido en un número finito de componentes conexas de U; digamos

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{m} J_l$$

J_l intervalo abierto. Elegimos entonces intervalos cerrados K_l tales que $K \cap J_l \subset K_l \subset J_l$, $\forall\, l = 1, 2, 3...$. Basta definir entonces

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{l=1}^{m} K_l \\ 0, & x \notin \bigcup_{l=1}^{m} J_l \\ \text{interpolación lineal en el resto} \end{cases}$$

Q.E.D.

Comentarios al Teorema de diferenciación de Lebesgue

DEFINICIÓN 5.2 *Se dice que una función medible, $f(x)$ es **Localmente integrable** si para todo conjunto acotado D, $f\chi_D$ (la restricción de f a D) es integrable. Escribiremos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$.*

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ son funciones localmente integrables pero no integrables.

Observación: El teorema de diferenciación de Lebesgue es cierto también para funciones localmente integrables.

Demostración:
Basta probar que si $f \in L^1_{loc}$, $\forall R$ el conjunto

$$\left\{ x \in (-R, R) \ : \ \limsup_{n \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\},$$

tiene medida cero, donde

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du.$$

Si llamamos $\widetilde{f} = f\chi_{[-2R,2R]}$, entonces $\widetilde{f} \in L^1$ y $\forall x \in (-R, R)$

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} m_h(\widetilde{f})(x) = 0 \quad c.t.p.$$

por el teorema habitual.

Q.E.D.

TEOREMA 5.6 (Teorema de diferenciación en $\mathbb{R}^n$) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ entonces*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy = f(x) \quad c.t.p.$$

donde $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - x| < r\}$ (bola de radio r centrada en x).

La demostración sigue los mismos pasos que en dimensión $n = 1$, incluida la

Desigualdad de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^n$:

Sea

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} |f(u)| du.$$

Entonces $\forall \lambda > 0$ se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

5.3. 2^o Teorema Fundamental del Cálculo

Recordemos que el 2^o **Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann** (ver Spivak, Cap. 14) dice lo siguiente

TEOREMA 5.7 *Sea $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable $\forall x \in [a,b]$. Si F' es integrable Riemann, entonces*

$$(*) \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'(u)du.$$

Observación: Si F' existe $\forall x$, entonces F es continua $\forall x$. En el Teorema sólo es necesario que $F'(x)$ exista $\forall x \in (a,b)$ y que sea continua en a y b (para usar el Teorema del Valor Medio).

Es importante que $F'(x)$ exista $\forall x$ y no salvo algún punto. Por ejemplo

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

cumple $H'(x) = 0 \ \forall x \neq 0$ pero $H(x) - H(a) \neq \displaystyle\int_a^x H'(y)dy$ si, por ejemplo, $a < 0 < x$.

Las funciones que cumplen el cometido $(*)$ de este 2º Teorema Fundamental del Cálculo en la integral de Lebesgue son las siguientes:

DEFINICIÓN 5.3 *Se dice que F es **Absolutamente continua**, escribimos $F \in AC$; si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que toda colección de intervalos disjuntos $\{I_j\}_{j\geq 1}$, $I_j = (a_j, b_j)$ con $\sum_{j\geq 1} |I_j| < \delta$, cumple*

$$\sum_{j\geq 1} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

*Se dice que F es **Localmente absolutamente continua**, escribimos $F \in AC_{loc}$ si $F\chi_D \in AC$ $\forall D$ conjunto medible acotado.*

Ejemplos:

1. Si F tiene derivada $\forall x$, acotada ($|F'(\xi)| \leq C \ \forall \xi$) entonces $F \in AC$ por el Teorema del Valor Medio $|F(b_j) - F(a_j)| \leq C|b_j - a_j|$.

2. Si F es AC, entonces F es uniformemente continua (i.e., $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, tal que $\forall x, y$ con $|x - y| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$). Basta coger un intervalo solo $I_1 = (x,y)$ en la definición de AC.

3. $F(x) = x^2$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, luego tampoco es AC. Sin embargo $F \in AC_{loc}$ (porque $F'(x) = 2x$ está localmente acotada).

4. Construimos una función $F : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua (por tanto, uniformemente continua, por ser $[0,1]$ compacto) pero tal que $F \notin AC_{loc}$. Para ello sea

$$F(\tfrac{1}{n}) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

con $n = 1, 2, 3, ...,$ y se define $F(x)$ por interpolación a partir de estos puntos. Tomando $I_j = (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j})$ se tiene $\forall N$

$$\sum_{j=N}^{\infty} |I_j| = \frac{1}{N} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pero

$$\sum_{j=N}^{\infty} \left| F\left(\frac{1}{j}\right) - F\left(\frac{1}{j+1}\right) \right| = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty$$

con m par y $\forall N$.

Ejercicio: Probar que $\lim_{x\longrightarrow 0^+} F(x) = 0$, que $F'(x)$ existe $\forall x \neq \frac{1}{n}, 0$ y que

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} |F'(x)| = \infty,$$

tomando en el límite $x \neq \frac{1}{n}$.

5. **Función de Cantor - Lebesgue**

   Como ya hemos visto, se trata de una función como la anterior, $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$, que es continua, que además cumple F creciente y $F'(x)$ existe c.t.p. y vale 0 pero $F \notin AC$. **Ejercicio**: Probar la afirmación $F \notin AC$.

6. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ entonces $F \in AC_{loc}$.

   Este es el ejemplo clave para entender cuándo una función F es (localmente) absolutamente continua. De hecho es el único ejemplo, como nos muestra el siguiente Teorema

TEOREMA 5.8 (2^o Tma. Fundamental del Cálculo para la Teoría de Lebesgue) *Las afirmaciones siguientes son equivalentes*

(a) $F \in AC_{loc}$

(b) $\exists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *tal que* $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)dt$, $\forall x, a \in \mathbb{R}$. *Además, en cualquiera de las dos situaciones anteriores, se tiene*

(c) F *tiene derivada en c.t.p.* $F' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ *y* $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x F'(t)dt$, $\forall x, a$

Demostración:
La implicación $b \Rightarrow c$ se sigue del teorema de diferenciación de Lebesgue, porque si $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ entonces F es derivable c.t.p. y $F'(x) = f(x)$ c.t.p. por tanto $F' \in L^1_{loc}$. Como claramente $c \Rightarrow b$, sólo necesitamos probar $a \Leftrightarrow b$.

Probaremos primero la afirmación del ejemplo 6 (que corresponde a la implicación $b \Rightarrow a$).

Demostración de $b \Rightarrow a$:
Si $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ entonces dada una colección de intervalos disjuntos $\{I_j\}$, $I_j = (a_j, b_j)$ con $\cup I_j \subset [-R, R]$ se tiene

$$\sum_{j\geq 1} |F(b_j) - F(a_j)| = \sum_{j\geq 1} \left| \int_{a_j}^{b_j} f(t)dt \right| \leq \sum_{j\geq 1} \int_{a_j}^{b_j} |f(t)|dt = \int_{\bigcup I_j} |f(t)|dt.$$

Necesitamos entonces probar el siguiente resultado para terminar la demostración:

$(*)$ Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$, entonces $\forall R\ \forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si E es medible, $E \subset [-R, R]$ y $|E| < \delta$, se tiene $\int_E |f(t)|dt < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 5.4 *Dadas dos medidas, ν y μ definidas sobre una misma σ-álgebra, $\mathcal{M}$, decimos que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ (escribimos $\nu \ll \mu$) si $\forall E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = 0$, se tiene $\nu(E) = 0$.*

Ejemplo: Si $g \in L^1(d\mu)$ y $\nu = |g|d\mu$ (es decir $\nu(A) = \int_A |g|d\mu$, $\forall A \in \mathcal{M}$) entonces ν es una medida (finita) absolutamente continua con respecto a μ (porque $\mu(E) = 0 \Longrightarrow \int_E |g|d\mu = 0$).

PROPOSICIÓN 5.9 *Si μ y ν son medidas en $\mathcal{M}$, $\nu \ll \mu$ y ν es finita entonces $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) < \delta$, se tiene $\nu(E) < \varepsilon$.*

Para terminar la demostración de que $b \Rightarrow a$ en el teorema, basta coger $g = |f|\chi_{[-R,R]}$. Entonces $g \in L^1(\mathbb{R}, dt)$ (porque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$) y por el ejemplo anterior $\nu = gdt \ll dt$; $(*)$ sigue entonces de la porposición.

Q.E.D.

Demostración de la proposición:
Supongamos lo contrario; es decir que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists E_n \in \mathcal{M}$ con $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ pero $\nu(E) \geq \varepsilon$.

Sea $F_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} E_k$ y $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \limsup_{n\to\infty} E_n$. Entonces $F_1 \supset F_2 \supset ...$ y

$$\mu(F) \leq \mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n$$

Luego $\mu(F) = 0$ pero $\nu(F) = \lim \nu(F_n) \geq \lim \nu(E_n) \geq \varepsilon$. ¡Contradicción!.

Q.E.D.

Comenzamos ahora con la ***Demostración de*** $a \Rightarrow b$:
Supongamos primero que F es además creciente. Fijado un intervalo $[a, b]$ definamos

$$\widetilde{F}(x) = \begin{cases} F(a), & x \leq a \\ F(x), & a \leq x \leq b \\ F(b), & b \leq x \end{cases}$$

Entonces claramente, $\widetilde{F}(x)$ es también creciente, acotada y $|\widetilde{F}| \in AC$ (Globalmente). Usaremos el siguiente

LEMA 5.10 *Si F es creciente, acotada y AC, entonces dF es finita y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración del lema 5.10: dF es finita porque $dF(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) < \infty$ (por ser acotada). Para probar que $dF \ll dt$, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que si $\{I_j\}$ son intervalos con $\sum_j |I_j| < \delta$ se tiene $\sum_j |F(I_j)| < \varepsilon$ (por ser AC). Sea E medible con medida $|E| = 0$. Por ser dt regular, existe abierto $U = \biguplus_j I_j$ tal que $U \supset E$ y $|U| = \sum |I_j| < \delta$. Por tanto $dF(E) \le dF(U) \le \sum_j dF(I_j) = \sum_j |F(I_j)| < \varepsilon$, $\forall \varepsilon$, y se sigue $dF(E) = 0$.

Q.E.D.

TEOREMA 5.11 (Teorema de Radon-Nikodym, versión preliminar) *Sean μ y ν dos medidas definidas en cierto σ-álgebra $\mathcal{M}$, con μ σ-finita y ν finita. Si $\nu \ll \mu$ entonces $\exists f \in L^1(\mu)$ tal que $d\nu = f d\mu$ (es decir $\nu(E) = \int_E f d\mu \ \ \forall E \in \mathcal{M}$).*

Para terminar la demostración de $a \Longrightarrow b$ (caso F creciente) definimos la función $\widetilde{F}$ asociada al intervalo $[-N, N]$. Por el lema, $d\widetilde{F}$ es finita y $d\widetilde{F} \ll dt$ y por el Teorema de Radom-Nikodym $\exists f \in L^1(dt)$ tal que

$$d\widetilde{F}((a,x]) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \quad si \quad -N < a < x < N,$$

en particular $\exists F'(x) = f(x)$ c.t.p. $x \in [-N, N]$ y $F'(x) \in L^1([-N,N], dx)$. Es decir,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt, \quad si \quad -N < a < x < N.$$

Haciendo tender $N \longrightarrow \infty$, obtenemos el resultado $\forall a, x$ con $a < x$ y $F^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$. (De forma que $dF = F'dt$)

El caso mas general de $a \Longrightarrow b$ (es decir cuando F no es creciente) se deduce del siguiente

LEMA 5.12 *Si F es AC en el intervalo, $[a,b]$, entonces podemos escribir F como la diferencia de dos funciones, $F = F_1 - F_2$ con $F_1, F_2 \in AC$ y crecientes en $[a,b]$.*

Aplicando el resultado anterior a F_1 y F_2 por separado, se tiene que F_1' y F_2' existen en c.t.p. en el interior de $[a,b]$, son integrables, y

$$F_j(x) = F_j(a) + \int_a^x F_j'(t)dt\ , \quad j = 1, 2.$$

Por tanto, $\exists F' = F_1' - F_2'$ c.t.p. y $F'(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$.

Q.E.D.

Demostración del lema 5.12:
Definimos para $a \leq x \leq b$ la función

$$T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \ : \quad a = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n = x \right\}$$

T_F tiene las siguientes propiedades:

1. $T_F(a) = 0$.
2. $T_F(x)$ es creciente ($\Rightarrow 0 \leq T_F(x) \leq T_F(b)$).
3. $$T_F(y) - T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^{m} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \ : \ x = x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_m = y \right\} \quad si \quad x \leq y$$
4. T_F es AC en $[a, b]$:

   Dado $\varepsilon > 0$, usando que F es AC en $[a, b]$, $\exists \delta > 0$ de forma que si $\{I_k\}$ es una colección de intervalos disjuntos en $[a, b]$ $I_k = (a_k, b_k)$ tales que $\sum |I_k| < \delta$ entonces $\sum |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.

   Por 3. para cada k, $\exists \ a_k = x_0^k < x_1^k < ... < x_{m_k}^k = b_k$ tal que

   $$T_F(b_k) - T_F(a_k) \leq \sum_{j=1}^{m_k} |F\left(x_j^k\right) - F\left(x_{j-1}^k\right)| + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

   Llamando $I_k^k = (x_{j-1}^k, x_j^k)$ se tiene

   $$\biguplus_k \biguplus_{j=1}^{m_k} I_j^k = \biguplus_k I_k$$

   Por tanto $s = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} |F(I_j^k)| < \varepsilon$ (ya que $\sum_k \sum_{j=1}^{m_k} |I_j^k| < \delta$) y así

   $$\sum_k |T_F(b_k) - T_F(a_k)| \leq \sum_k \left(\sum_{j=1}^{m_k} |F(x_j^k) - F(x_{j-1}^k)| + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = s + \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} < 2\varepsilon.$$

5. $\frac{1}{2}(T_F + F)$ y $\frac{1}{2}(T_F - F)$ son AC y crecientes (**ejercicio**).
6. Como $F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F) = F_1 - F_2$ con $F_1 = \frac{1}{2}(T_F + F)$, $F_2 = \frac{1}{2}(T_F - F)$. Por 5 F_1 y F_2 son AC (en $[a, b]$) y crecientes.

Q.E.D.

5.4. El teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue

Debido a sus múltiples aplicaciones, lo presentamos en un contexto mas general. Observemos primero que si $f \in L^1(d\mu)$ y se define $\nu(A) = \int_A f d\mu$, entonces

- $\nu(\emptyset) = 0$
- Si $\{A_j\}$ son medibles y disjuntos,

$$\nu(\bigcup_j A_j) = \int_{\bigcup_j A_j} f d\mu = \sum_j \int_{A_j} f d\mu = \sum_j \nu(A_j)$$

Pero ν no es medida a menos que $f \geq 0$.

DEFINICIÓN 5.5 *Dada una σ-álgebra $\mathcal{M}$, decimos que la función $\nu : \mathcal{M} \longrightarrow [-\infty, \infty]$ es una* ***medida con signo*** *si verifica:*

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. $\nu(A) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{M}$, *ó* $\nu(A) > -\infty \quad \forall A \in \mathcal{M}$.
3. $\nu(\biguplus A_j) = \sum_j \nu(A_j)$, $\forall \{A_j\} \subset \mathcal{M}$, *familia disjunta.*

Ejemplos:

1. Sean f y g funciones positivas y medibles en $(X, \mathcal{M}, \mu)$ tales que bien $\int f d\mu < \infty$ o bien $\int g d\mu < \infty$. Entonces $\nu(A) = \int_A f d\mu - \int_A g d\mu$ es una medida con signo en $\mathcal{M}$.
2. Sean ν_1, ν_2 dos medidas en $\mathcal{M}$ de forma que al menos una de ellas es finita. Entonces $\nu = \nu_1 - \nu_2$ es una medida con signo en $\mathcal{M}$.

DEFINICIÓN 5.6 *Sea ν una medida con signo en $\mathcal{M}$. Se dice que $A \in \mathcal{M}$ es un conjunto:*

$$\begin{cases} \textbf{\textit{Positivo}},\ si\ \nu(A \cap E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{M} \\ \textbf{\textit{nulo}},\ si\ \nu(A \cap E) = 0, \quad \forall E \in \mathcal{M} \\ \textbf{\textit{negativo}},\ si\ \nu(A \cap E) \leq 0, \quad \forall E \in \mathcal{M} \end{cases}$$

En el ejempo 1 anterior se tiene
$A = \{x \;:\; f(x) \geq g(x)\}$ es positivo para ν.
$B = \{x \;:\; f(x) < g(x)\}$ es negativo para ν.
$C = \{x \;:\; f(x) = g(x)\}$ es nulo para ν.

TEOREMA 5.13 (Teorema de descomposición de Hahn y Jordan) *:*

a) ***Hahn*** *Si ν es una medida con signo sobre la σ-álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\exists P, N \in \mathcal{M}$ disjuntos, con $X = P \bigcup N$ tales que P es un conjunto positivo para ν y N es negativo para ν.*

b) ***Jordan*** *Si definimos* $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$*,* $\nu^-(A) = \nu(A \cap N)$*, entonces* ν^+ *y* ν^- *son medidas positivas y* $\nu = \nu^+ - \nu^-$*.*

Demostración de b) (Jordan):

1. $\nu^+(\emptyset) = \nu^-(\emptyset) = 0$.

2. $\{A_j\} \subset \mathcal{M}$ disjuntos,

$$\nu^+ \left(\bigcup_j A_j \right) = \nu \left(\bigcup_j (A_j \cap P) \right) = \sum_j \nu(A_j \cap P) = \sum_j \nu^+(A_j)$$

(y lo mismo para ν^-)

Además $\nu(A) = \nu(A \cap P) + \nu(A \cap N) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$, luego $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Q.E.D.

DEFINICIÓN 5.7 ν^+ *y* ν^-*, se denominan la* ***variación positiva y negativa*** *(respectivamente) de* ν*. Si definimos la medida* $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ *es decir,* $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A)$ $A \in \mathcal{M}$ *entonces* $|\nu|$ *se denomina la* ***variación total de*** ν*.*

DEFINICIÓN 5.8 *Dos medidas con signo* λ *y* μ *definidas sobre la misma* σ*-álgebra* $\mathcal{M}$ *se dicen que son* ***mutuamente singulares*** *(escribiremos* $\lambda \perp \mu$ *para denotarlo) si existe una descomposición* $X = E \cup F$*,* $E \cap F = \emptyset$ *tal que* E *es un conjunto nulo para* μ *y* F *es nulo para* λ*. Informalmente diremos que* λ *"vive" en* E *y que* μ *"vive" en* F*.*

Ejemplos:

1. En la descomposición de Jordan de ν, $\nu^+ \perp \nu^-$.

2. Si $X = [0, 1]$ y F es la función de Cantor-Lebesgue, entonces $dF \perp dt$ en X. Esto es porque si $\mathcal{C}$ es el conjunto de Cantor y $U = [0, 1] \setminus \mathcal{C}$, se tiene $X = \mathcal{C} \cup U$. $\mathcal{C}$ es nulo para dt y U lo es para dF (porque U está formado por intervalos abiertos y dF es constante en cada uno de ellos).

DEFINICIÓN 5.9 *Dada* μ *medida (positiva) y* ν *medida con signo, se dice que* ν *es* ***absolutamente continua*** *con respecto a* μ *(*$\nu \ll \mu$*) si dado* $A \in \mathcal{M}$ *con* $\mu(A) = 0$*, se tiene* $\nu(A) = 0$*.*

Ejercicios: Probar
$\nu \ll \mu \Longleftrightarrow |\nu| \ll \mu \Longleftrightarrow \nu^+ \ll \mu$ y $\nu^- \ll \mu$
Si $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$, entonces $\nu \equiv 0$.
Sea μ una medida positiva. Entonces $\nu \perp \mu \Longleftrightarrow \nu^+ \perp \mu$ y $\nu^- \perp \mu$.

PROPOSICIÓN 5.14 *(ya vista):* $\nu \ll \mu \Longleftrightarrow$*,* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ *tal que* $\mu(A) < \delta$*, entonces se tiene* $|\nu(A)| \leq |\nu|(A) < \varepsilon$*,* $A \in \mathcal{M}$*.*

LEMA 5.15 *Si ν y μ son medidas finitas en $\mathcal{M}$, entonces bien $\nu \perp \mu$. o bien $\exists \varepsilon > 0$, $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) > 0$ y $\nu(A) \geq \varepsilon\mu(A)$, $\forall A \subset E$, (es decir, E es un conjunto positivo para $d\nu - \varepsilon d\mu$).*

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$ es una medida con signo. Por la descomposición de Hahn, $X = P_n \uplus N_n$. P_n positivo para ν_n y N_n negativo. Sean $P = \cup P_n$ y $N = \cap N_n$. Entonces $X = P \uplus N$ y $\nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A) \leq 0$, $\forall A \subset N$, $\forall n$ ($A \in \mathcal{M}$). En particular $\nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N)$ $\forall n$. Luego $\nu(N) = 0$ (N es nulo para ν).

Hay ahora dos posibilidades: bien $\mu(P) = 0$, en cuyo caso $\nu \perp \mu$ o bien $\mu(P_{n_0}) > 0$ para algún n_0. En este caso, el Lema sa sigue tomando $E = P_{n_0}$ y $\varepsilon = 1/n_0$.

Q.E.D.

TEOREMA 5.16 (Teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue) *Sea μ una medida σ-finita y ν una medida con signo, finita, ambas definidas sobre una σ-álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces ν se puede descomponer como $\nu = \lambda + \rho$, λ y ρ son medidas finitas con signo y $\lambda \perp \mu$ y $\rho \ll \mu$.*

Además, $\exists f_0 \in L^1(d\mu)$ tal que $d\rho = f_0 d\mu$, de forma que $d\nu = d\lambda + f_0 d\mu$.

DEFINICIÓN 5.10 *La función anterior f_0 se denomina **derivada de Radon-Nikodym** de ν respecto a μ y se denota $f_0 = d\nu/d\mu$.*

Demostración:

Podemos suponer que ν es medida positiva (o, si no, considerar ν^+, ν^- por separado, también supondremos μ finita o nos restrigimos a $X = \cup X_n$, $\mu(X_n) < \infty$).

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \longrightarrow [0, +\infty] \ : \int_E f d\mu \leq \nu(E) \ , \forall E \in \mathcal{M}\}$. Es decir, $f \in \mathcal{F} \iff d\nu - f d\mu$ es una medida positiva en $\mathcal{M}$.

Observamos que si $f, g \in \mathcal{F}$, entonces $h = \text{máx}(f, g) \in \mathcal{F}$, porque si $D = \{x : \ f(x) > g(x)\}$,

$$\int_A h d\mu = \int_{A \cap D} f d\mu + \int_{A \cap D^c} g d\mu \leq \nu(A \cap D) + \nu(A \cap D^c) = \nu(A).$$

Sea $a = \sup\{\int_X f d\mu \ : \ f \in \mathcal{F}\}$. Se tiene $a \leq \nu(X) < \infty$. Afirmamos que $\exists f_0 \in \mathcal{F}$ extremal, es decir, tal que $a = \int_X f_0 d\mu$ (en particular $f_0 \geq 0$ y $f_0 \in L^1(d\mu)$). Esto es porque $\exists f_n \in \mathcal{F}$ tal que $\int_X f_n d\mu \longrightarrow a$, por definición de supremo.

Si $g_n = \text{máx}(f_1, ..., f_n)$, entonces $g_1 \leq g_2 \leq \cdots \leq g_n \leq \ldots$, $g_n \in \mathcal{F}$ y $\int_X g_n d\mu \longrightarrow a$. Definiendo $f_0(x) = \text{lím}_{n\to\infty} g_n$, el T.C.M. prueba la afirmación.

Sea $d\lambda = d\nu - f_0 d\mu$. λ es una medida positiva, porque $f_0 \in \mathcal{F}$. Sólo hace falta ver que $d\lambda \perp d\mu$. Pero si no lo fuera, por el lema anterior, $\exists \varepsilon > 0$, $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$ tal que E es positivo para $d\lambda - \varepsilon d\mu$. En particular, $d\lambda - \varepsilon\chi_E d\mu = d\nu - (f_0 + \varepsilon\chi_E)d\mu$ es una medida positiva. Pero entonces $f_0 + \varepsilon\chi_E \in \mathcal{F}$, lo cual es absurdo porque

$$\int_X (f_0 + \varepsilon\chi_E) d\mu = a + \varepsilon\mu(E) > a.$$

Q.E.D.