Teoría de la integral y de la medida

Hoja n^0 8 *(Medidas con signo y el teorema de Radon-Nikodym)*

1.- Sea ν una medida con signo en el espacio medible $(X\mathcal{A})$. Demostrar que:
a) si $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no decreciente en $\mathcal{A}$, entonces $\nu(\cup_{j\in\mathbb{N}}E_j) = \lim_{j\to\infty}\nu(E_j)$;
b) si $\{E_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión no creciente en $\mathcal{A}$ y $\nu(E_1)$ es finita, entonces $\nu(\bigcap_{j\in\mathbb{N}}E_j) = \lim_{j\to\infty}\nu(E_j)$.

2.- Demostrar que cualquier subconjunto medible de un conjunto positivo es positivo, y que la unión de cualquier familia numerable de conjuntos positivos es un conjunto positivo.

3.- Sean $(X,\mathcal{A})$ un espacio medible, μ una medida en $\mathcal{A}$ y ν una medida con signo en $\mathcal{A}$. Demostrar que:
a) $\nu << \mu$ si y sólo si $|\nu| << \mu$, si y sólo si $\nu^+ << \mu$ y $\nu^- << \mu$.
b) si $\nu << \mu$ y $\nu \perp \mu$ entonces $\nu = 0$.

4.- Sea $X=\mathbb{N}$, $\mathcal{A}=\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ν la medida de contar en $\mathbb{N}$, $\mu(E)=\sum_{n\in E}\frac{1}{2^n}$. Comprobar que $\nu \ll \mu$, sin embargo no se verifica la condición de que dado $\epsilon>0$, $\exists\delta>0$ tal que $\mu(E)<\delta \Rightarrow \nu(E)<\epsilon,\quad E\in\mathcal{A}$.

5.- Sea $X=[0,1]$, $\mathcal{A}=\mathcal{B}_{[0,1]}$ m la medida de Lebesgue en $\mathcal{A}$, μ la medida de contar en $\mathcal{A}$. Probar
a) $m \ll \mu$ pero $dm \neq fd\mu$ para toda f.
b) μ no tiene descomposición de Lebesgue respecto de m.

6.- Sea $(X,\mathcal{A},\mu)$ un espacio de medida σ-finito. Sea $\mathcal{B}$ una subálgebra de $\mathcal{A}$ y sea ν la restricción de μ a $\mathcal{B}$. Si $f\in L^1(\mu)$ demostrar que existe g $\mathcal{B}$-medible, $g\in L^1(\nu)$ tal que $\int_E fd\mu = \int_E gd\nu$ para todo $E\in\mathcal{B}$, además g es única módulo alteraciones en conjuntos ν-nulos. (A la función g se le llama en probabilidad $E(f|\mathcal{B})$, esperanza condicionada de f con respecto $\mathcal{B}$).

7.- Probar que si una medida λ en $\mathbb{R}$ tiene soporte en un conjunto numerable $\{x_j\}_j$, entonces existen constantes c_j tales que $\lambda(E)=\sum_j c_j\chi_E(x_j)$, es decir $\lambda=\sum_j c_j\delta_{x_j}$ (δ_a representa la delta de Dirac en el punto $x=a$).

8.- Se dice que una función $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es absolutamente continua si dado $\epsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que dadas dos sucesiones de números $\{a_k\}_k$ y $\{b_k\}_k$, con $a_k<b_k$, $\forall k$, entonces

$$\text{si}\quad \sum_{k\geq 1}|b_k-a_k|<\delta, \qquad \text{se tiene}\quad \sum_{k\geq 1}|F(b_k)-F(a_k)|<\epsilon.$$

Probar que si F es absolutamente continua y, además, creciente entonces la medida de Lebesgue-Stieltjes dF es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx en $\mathbb{R}$.

9.- Sea dF la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a la función

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \text{si} \quad x<0 \\ x, & \text{si} \quad 0\leq x<1 \\ 1, & \text{si} \quad 1\leq x \end{cases}$$

a) Demostrar que dF es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue m (d$F << m$).

b) Encontrar la derivada de Radon-Nikodym de $\mathrm{d}F$ con respecto a m.
c) Sea μ la medida de contar números racionales en el intervalo $[0,1]$, es decir, μ viene definida por $\mu(A) =$card$(A \cap [0,1] \cap \mathbb{Q})$. Demostrar que $\mathrm{d}F$ y μ son mutuamente singulares ($\mathrm{d}F \perp \mu$).

10.- Sean $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible, ν una medida con signo σ–finita en $\mathcal{A}$ y λ y μ medidas σ–finitas en $\mathcal{A}$ tales que $\nu << \mu$ y $\mu << \lambda$. Demostrar que:
a) Si $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \nu)$, entonces $g\frac{d\nu}{d\mu} \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ y

$$\int_X g\, d\nu = \int_X g \frac{d\nu}{d\mu}\, d\mu.$$

b) $\nu << \lambda$ y $\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda}$ en casi todo punto con respecto a λ.