Teoría de la integral y de la medida, 2023-24
Hoja nº 7 *(medidas y σ-álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini)*

1.- Sea $d\nu$ la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \mathrm{card}(A \cap \mathbb{Z}^2) \quad \text{para todo } A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, $d\nu$ es la medida que "cuenta" el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Si $d\nu_\phi$ es la medida inducida por $d\nu$ y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\nu_\phi([1,e])$ y $\nu_\phi((e^2,e^3])$.

2.- Si consideramos en $X = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ la medida de área de Lebesgue habitual, dm, y si $\varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2$, o $\varphi(x_1,x_2) = |x_1 - x_2|$, demostrar que las medidas inducidas dm_φ son medidas de Lebesgue-Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ y encontrar, en cada caso, la función de distribución.

NOTA: ver también los exámenes parciales 3 de los cursos 2007-08 y 2008-09.
3.- Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $dm = dx\,dy$ la medida de Lebesgue en X. Definimos $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m en $\mathbb{R}$.

a) Calcular el valor de $m_\Phi([0,1])$.
b) Demostrar que m_Φ tiene la forma $dm_\Phi(y) = W(y)\,dy$ y encontrar $W(y)$ explícitamente.

4.- Se considera sobre los conjuntos de Borel de $\mathbb{R}^2$ la medida de Lebesgue m y la función $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow (0,1]$ dada por $\phi(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Si dm_ϕ denota la medida inducida por ϕ y m sobre los Borel de $(0,1]$,

a) Probar que $dm_\phi([a,b]) = \pi \log \frac{b}{a}$ si $0 < a < b \leq 1$.
b) Deducir que para todo $A \subset (0,1]$ Borel se tiene $m_\phi(A) = \pi \displaystyle\int_A \frac{1}{t} dt$.

5.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Probar que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n+1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\displaystyle\int |\, f \,|\, d(\mu \times \nu) = \infty$ y que las integrales iteradas

$$\int \left(\int f d\mu \right) d\nu, \qquad \int \left(\int f\, d\nu \right) d\mu)$$

existen y son distintas.

6.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ medible; $g : Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ medible y h definida mediante $h(x,y) = f(x)g(y)$.

a) Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible.
b) Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ entonces $h \in L^1 d(\mu \times \nu)$ y además

$$\int_{X \times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f\, d\mu \right) \left(\int_Y g\, d\nu \right).$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

7.- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$-medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$). *Sugerencia:* empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ-finita, probar que $\displaystyle\int_X f\,d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = d\mu \otimes dy$ del conjunto A_f.

8.- Sea $X = Y = [0,1]$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en [0,1]), μ la **medida de Lebesgue** en $\mathcal{A}_1$, ν la **medida de contar** en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x,y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y que $(\mu \times \mu)(V) = +\infty$. Sin embargo

$$\int_Y d\nu \int_X \chi_V d\mu = 0, \qquad \int_X d\mu \int_Y \chi_V d\nu = 1.$$

Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ-finitas no se puede quitar del enunciado del Teorema de Fubini.
Sugerencia: Si $V_n = (I_1^j \times I_1^j) \cup \ldots \cup (I_n^j \times I_n^j)$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots 2^n$, entonces $V = \cap_1^\infty V_n$.

9.- Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}m)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(x-y)g(y)$ es integrable en y para casi todo x. Para estos valores de x, ponemos $h(x) = \int_\mathbb{R} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}m(y)$. Se dice que h es *la convolución* de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int_\mathbb{R} |h|\,\mathrm{d}m$.

10.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Comprobar que $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dy\Big)\,dx = \frac{\pi}{4}$ y que $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\,dx\Big)\,dy = -\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el teorema de Fubini?

11.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1,1] \times [-1,1]$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

12.- a) Sea $\mathcal{B}$ un álgebra y $\mathcal{A}$ un σ-álgebra sobre X, tales que $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$. Supongamos que μ, ν son medidas finitas definidas sobre $\mathcal{A}$, que coinciden en el álgebra $\mathcal{B}$. Demostrar que la colección de conjuntos

$$\mathcal{E} = \big\{D \subset X : \quad \mu(D) = \nu(D)\big\}$$

es una clase monótona que contiene $\mathcal{B}$. Deducir que μ coincide con ν en la σ-álgebra generada por $\mathcal{B}$. En otras palabras, una pre-medida finita, definida sobre un álgebra $\mathcal{B}$, se extiende de forma única a la σ-álgebra, generada por esta álgebra. (El Teorema de Carathèodori-2 afirma la existencia de esta extensión).

b) Utilizando el apartado a), demostrar la misma afirmación para el caso de una pre-medida σ-finita. Es decir, demostrar que toda pre-medida σ-finita, definida sobre un álgebra $\mathcal{B}$ sobre X, se extiende de forma única a la σ-álgebra, generada por el álgebra $\mathcal{B}$.