Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2023-24)

Hoja nº 4

1. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $f(x) = 0$ si x es racional, $f(x) = n$ si n es el número de ceros inmediatamente después del punto decimal en la representación de x en la escala decimal. Calcular $\int f\, dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

2. Sea $f(x)$ la función definida en $(0,1)$ mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = [\frac{1}{x}]$ si x es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular $\int f(x)\, dm$ siendo m la medida de Lebesgue.

3. Comprobar que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dm = \infty$, siendo m la medida de Lebesgue.

4. Sea $f_n(x) = \min(f(x), n)$ siendo $f(x) \geq 0$ y medible. Demostrar que $\int f_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu$.

5. Sean f_n funciones medible no negativas y acotadas. Supongamos que $f_n(x) \downarrow f(x)$ y que para algún k se verifica $\int f_k\, d\mu < \infty$. Probar que (**TCM para sucesiones decrecientes**):
$$\lim \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$
(Sugerencia: Formar la sucesión $g_n = f_k - f_{k+n}$).

6. Sea $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3, \ldots, \geq a_n, \ldots,$ una sucesión de números positivos tales que $\lim a_n = 0$. Sea $f_n(x) = a_n/x$ para $x \geq a > 0$. Comprobar que f_n decrece a cero uniformemente pero $\int_a^\infty f_n\, dm = \infty$ para todo n.

7. Sea $f_n : [0,1] \to [0, \infty)$, definida mediante
$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
Comprobar que $f_n \to 0$ puntualmente, pero $\int f_n\, dm = 1$.

8. Sea $f(x) = 0$ en cada punto del conjunto ternario de Cantor en [0,1]. Sea $f(x) = p$ en cada intervalo del complementario de longitud $\frac{1}{3^p}$. Demostrar que f es medible y calcular $\int_{[0,1]} f\, dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

9. Llamemos $d_i(x)$ a los dígitos del desarrollo decimal $0.d_1 d_2 ...$ de un $x \in (0,1)$. Decir por qué son convergentes las series
$$f(x) = \sum_i d_i(x)/2^i, \quad g(x) = \sum_i (-1)^{d_i(x)}/2^i,$$
y hallar $\int_0^1 f$ y $\int_0^1 g$, expresándolas como sumas de series. ¿Por qué son válidas esas expresiones?

10. Sea $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]}$, $f_{2n} = \chi_{(1,2]}$, $n = 1, 2, \ldots$ Comprobar que se verifica la desigualdad de Fatou estrictamente.

11. Sean $f \geq 0$, $g \geq 0$ medibles, $f \geq g$, $\int g\, d\mu < \infty$. Demostrar que
$$\int f\, d\mu - \int g\, d\mu = \int (f - g)\, d\mu.$$

12. Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles de X en $\mathbb{R}$:

$$f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_n \le f_{n+1} \le \ldots$$

Ponemos $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in (-\infty, +\infty]$.

a) Demostrar que $\lim_n \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$ si f_1 es integrable.

b) Dar un ejemplo en el que $\int_X f_n \, d\mu = -\infty$ para todo n, mientras que $\int_X f \, d\mu = 0$.

13. Sea $f_n \ge 0$ medible, $\lim f_n = f$, $f_n \le f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobar que $\int f \, d\mu = \lim \int f_n \, d\mu$.

Sugerencia: Usar el lema de Fatou y que $\int f_n \, d\mu \le \int f \, d\mu$).

14. Sea $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ integrable. Sea $\{E_n\}$ uns sucesión decreciente de conjuntos tal que $\cap_1^\infty E_n = \emptyset$. Demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_{E_n} g \, d\mu = 0$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ medible y $f \in L^1(m)$. Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dm$. Demostrar que $F(x)$ es continua.

Sugerencia: Usar teoremas de convergencia.

Demostrar que dados $x_1 < x_2 < x_3 < ...$ números reales, se tiene

$$\sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \le \int_{\mathbb{R}} |f| \, dm.$$

16. Sea $\mu(X) < \infty$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\mu)$, con $f_n \to f$ uniformemente. Demostrar que $f \in L^1(\mu)$ y que $\int f_n \, d\mu \to \int f \, d\mu$.

Sugerencia: Estudiar la sucesión $\varepsilon_n = f_n - f$, escribir $f = f_n - (f_n - f)$.

17. Sea $A = [0,1] \cap \mathbf{Q}$, entonces $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots\}$. Definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ mediante: $f_n(x) = 1$ si $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ y $f_n(x) = 0$ en los demás casos. Probar que f_n es integrable Riemann, hallar $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ y estudiar si f es integrable Riemann.

18. Demostrar que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}} = 1.$

Sugerencia: Usar que para $n > 1$ se tiene que $(1 + \frac{x}{n})^n \ge \frac{x^2}{4}$.

19. Sea $\displaystyle f_n(x) = \frac{nx - 1}{(x \log n + 1)(1 + nx^2 \log n)}$, $x \in (0,1]$. Comprobar que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ y sin embargo $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, dx = \frac{1}{2}$.

Sugerencia: $f_n(x) = -\frac{1}{x \log n + 1} + \frac{nx}{(n \log n)x^2 + 1}$.

20. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty \frac{n}{1 + n^2 x^2} \, dx$, estudiando los casos $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$. ¿ Qué teoremas de convergencia son aplicables ?

21. Calcular $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} \, dx$.

22. En cada uno de los siguientes casos, demostrar que $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n \, dm = 0$, siendo m la medida de Lebesgue:

a) $\displaystyle f_n(x) = \frac{nx \log x}{1 + n^2 x^2}$; b) $\displaystyle f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1 + n^2 x^2}$;

c) $\displaystyle f_n(x) = \frac{n^{3/2} x}{1 + n^2 x^2}$; d) $\displaystyle f_n(x) = \frac{n^p x^r \log x}{1 + n^2 x^2}$, $r > 0$, $p < \min(2, 1 + r)$.

23. Demostrar que $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1 - x}\right)^2 dx = 2 \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$.