

1. Sea  $\mathcal{A}$  la  $\sigma$  álgebra formada por  $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$ . Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0], \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1], \\ 2 & \text{si } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

¿Es  $f$  medible? ¿Cómo son en general las funciones medibles  $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ ?

2. Sea  $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$  una función medible no-negativa,  $\mu$  una medida  $\sigma$ -finita en  $\mathcal{A}$ . Probar que  $f(x) = \lim t_n(x)$  siendo  $\{t_n\}_n$  una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que  $t_n$  toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita.

Sugerencia: Construir  $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_n \subset \dots$ , donde  $\mu(\mathcal{B}_n) < \infty$ , tomar  $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}_n}$ , siendo  $s_n$  una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite  $f$ .

3. Probar que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es monótona, entonces  $f$  es medible Borel.
4. Probar que si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  verifica que  $\{x \in X : f(x) > r\}$  es medible para todo  $r \in \mathbf{Q}$ , entonces  $f$  es medible. (El resultado es cierto en general si en la hipótesis figura cualquier subconjunto denso de  $\mathbb{R}$ , en lugar de  $\mathbf{Q}$ .)
5. Dadas funciones medibles  $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ , demostrar que  $\max(f, g)$ ,  $\min(f, g)$ ,  $f + g$  y  $fg$  son medibles.
6. Para funciones  $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ , ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
- $|f|$  medible  $\Rightarrow f$  medible.
  - $f_1 + f_2$  medible  $\Rightarrow f_1$  ó  $f_2$  medible.
  - $f_1 \cdot f_2$  medible  $\Rightarrow f_1$  ó  $f_2$  medible
  - $f_1 + f_2$  medible  $\Rightarrow f_1$  y  $f_2$  medible
  - $f_1 - f_2$  medible  $\Rightarrow f_1$  y  $f_2$  medible

7. Sea  $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , funciones medibles.

(a) Demostrar que  $\inf_n f_n$  y  $\sup_n f_n$  son funciones medibles.

*Indicación.*  $\{\sup_n f_n > a\} = \cup_n \{f_n > a\}$ .

(b) Deducir que  $\limsup f_n$ ,  $\liminf f_n$  son medibles.

(c) Demostrar que el conjunto  $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$  es un elemento de  $\mathcal{A}$ , y que  $\lim f_n$  es medible.

(d) Demostrar que si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es  $\mathcal{A}$ -medible y  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces la composición  $g \circ f$  es  $\mathcal{A}$ -medible.

8. Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$  un espacio de probabilidad. Sean  $X_1$  y  $X_2$  dos **variables aleatorias** sobre él, esto es, dos funciones medibles de  $(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ , y  $F_{X_1}$  y  $F_{X_2}$  las **funciones de distribución** de las medidas de probabilidad inducidas por  $X_1$  y  $X_2$  respectivamente, definidas por

$$F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \leq x\}, \quad j = 1, 2.$$

Demostrar que si  $P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = 1$ , entonces  $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

9. Consideramos el espacio de probabilidad  $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$ , siendo  $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Definimos  $X : \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$  mediante  $X(n) = \text{resto de } n \text{ (modulo } k)$ , ( $k \in \mathbf{N}$ , fijo). Sea  $P^*$  la probabilidad inducida por  $X$  (ver ejercicio 16, Hoja 2). Calcular  $P^*(r)$ ,  $0 \leq r \leq k-1$ .
10. Se considera el espacio de probabilidad  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$ , donde  $P(A) = \int_A f(x) dx$  viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Sea  $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \rightarrow \mathbb{R}$  definida mediante

$$X(x) = \begin{cases} -2 \log x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar  $F_X$ , la función de distribución de la probabilidad inducida por  $X$ .