Teoría de la integral y de la medida
Hoja n^0 1 *(Introducción)*

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monótona y acotada. Probar que f es integrable Riemann.

2. Probar que si las funciones $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ son integrables Riemann y forman una sucesión uniformemente convergente a cierta función f, entonces f es integrable Riemann y se tiene $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$. Dar ejemplos de cómo, si el límite NO es uniforme, *puede* que no exista la integral $\displaystyle\int_a^b f$, o que no coincida con el $\displaystyle\lim_n \int_a^b f_n$.

3. Probar las desigualdades:

   i) $A \subset B \implies m^*(A) \leq m^*(B)$

   ii) $\displaystyle m^*\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} m^*(A_k)$

4. Probar que todo conjunto numerable tiene medida exterior de Lebesgue nula. Encontrar un conjunto denso en $[0, 1]$ de medida nula.

5. Probar que la unión numerable de conjuntos de medida exterior de Lebesgue nula tiene medida nula.

6. Probar que si $A \subset [0, 1]$ cumple $m^*(A) = 1$, entonces A es denso en $[0, 1]$.

7. Demostrar que dado un intervalo I cualquiera de $\mathbb{R}$ se tiene $m^*(I) = \mathrm{long}(I)$. *Indicación*: probar primero que si $\{I_k\}_{k=1}^n$ es un recubrimiento finito de I por intervalos se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{long}(I_k) \geq \mathrm{long}(I)$. A continuación usar un argumento de "compacidad".

8. *a*) Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$, $\forall B \subset \mathbb{R}$.

   b) Lebesgue definió la clase de subconjuntos medibles de $[0, 1]$ como la de aquellos $A \subset [0, 1]$ tales que $m^*(A) + m^*(A^c) = 1$, (donde $A^c = [0, 1] \setminus A$). Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces A es medible.

9. Probar que el conjunto D de números en $[0, 1]$ tal que su desarrollo decimal no contienen el 5 es un conjunto de medida (exterior de Lebesgue) cero (i.e., $m^*(D) = 0$).

10. Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos la *oscilación de f en x* por

$$\mathcal{O}_f(x) = \lim_{\delta\to 0^+} \left\{ \sup_{|x-y|\leq\delta} f - \inf_{|x-y|\leq\delta} f \right\}.$$

   a) Probar que f es continua en x si y solo si $\mathcal{O}_f(x) = 0$.

   b) (*) Demostrar el Teorema de Lebesgue: f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si todos los conjuntos $E_k = \{x \in [a, b] : \mathcal{O}_f(x) \geq 1/k\}$ con $k \in \mathbb{N}$ tienen medida nula[1]

[1] Nótese que, por el apartado a), el conjunto de puntos de discontinuidad de f coincide con $\cup_{k=1}^{\infty} E_k$.

11. Definimos la sucesión de funciones $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\cos(\pi m! x)\big)^{2n}$ y luego la función $g(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ ($x \in [0,1]$). (Observad que las funciones f_m son límites puntuales de funciones continuas.) Decidir si f_m y g son integrables Riemann y si son integrables Lebesgue.

    ¿Es cierta la igualdad

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 \big(\lim_{m\to\infty} f_m(x)\big)\,dx$$

    (en algún sentido)?