**Teoría de la Integral y de la Medida**

**Primer examen parcial, 17/11/2023, 14:00 - 16:00**

---

**1.** *(3 puntos)* Sea
$$\mathcal{A} = \big\{\emptyset, \{a,b\}, \{c,d\}, X\big\},$$
donde $X = \{a,b,c,d\}$ consta de 4 elementos.

**a)** *(1 punto)* Demostrar que toda medida finita $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ tal que $\mu(X) > 0$ se extiende a una medida $\hat{\mu} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$, pero que esta extensión nunca es única.

**b)** *(1 punto)* Sea $\mu : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ una medida, que satisface $\mu(\{a,b\}) > 0$, $\mu(\{c,d\}) > 0$. Demostrar que hay una biyección natural entre el conjunto de todas las extensiones $\hat{\mu} : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ de la medida $\mu$ y el cuadrado $[0,1] \times [0,1]$.

**c)** *(1 punto)* Supongamos ahora que $Y$ es numerable y $\mathcal{M}$ es una $\sigma$-álgebra sobre $Y$. Se dice que un conjunto $D \in \mathcal{M}$, $D \neq \emptyset$, *es un átomo de* $\mathcal{M}$ si ningún conjunto $E$ tal que $\emptyset \neq E \subsetneq D$ pertenece a $\mathcal{M}$.

Sea $\mu$ una medida finita sobre $(Y, \mathcal{M})$. Demostrar que $\mu$ siempre tiene una extensión a $\mathcal{P}(Y)$. Demostrar que esta extensión es única si y solo si $\mu(D) = 0$ para todo átomo $D \in \mathcal{M}$, que tiene más de un elemento.

---

**2.** *(3 puntos)* Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una $\sigma$ - álgebra en $X$. Se define en $Y$ la familia de subconjuntos $\mathcal{B} = \{g(E) : E \in \mathcal{A}\}$.

Estudiar si $\mathcal{B}$ es una $\sigma$–álgebra.

Si esto se cumple siempre, se debe dar una demostración. Si hay casos cuando no se cumple, se debe dar un contraejemplo y, si es posible, dar hipótesis adicionales sobre $g$ que garanticen el resultado positivo.

---

**3. a)** *(3 puntos)* Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio con medida. Sea $f \in L^1(\mu)$ una función tal que $f(x) > 1$ para todo $x \in X$. Demostrar que
$$\int_X \frac{nf^3(x) - 1}{nf^2(x) - 1}\, d\mu(x) \to \int_X f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$

**b)** *(1 punto)* Sean $(X, \mathcal{A}, \mu)$ y $f$ como en el apartado a). Demostrar que
$$\int_X \frac{nf^3(x) + 1}{nf^2(x) - 1}\, d\mu(x) \to \int_X f(x)\, d\mu(x) \qquad \text{cuando } n \to \infty.$$