Teoría de la integral y de la medida, 2021-22

Hoja nº 7 *(medidas y σ-álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini)*

1.- Sea $d\nu$ la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z}^2) \quad \text{para todo } A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, $d\nu$ es la medida que "cuenta" el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $\phi(x,y) = e^{x^2+y^2}$. Si $d\nu_\phi$ es la medida inducida por $d\nu$ y ϕ en $\mathbb{R}$, calcular $\nu_\phi([1,e])$ y $\nu_\phi((e^2,e^3])$.

SOL: Por definición, $\nu_\phi([1,e]) = \nu(\{(x,y) : \phi(x,y) \in [1,e]\})$, es decir, $\nu_\phi([1,e]) = \nu(\{(x,y) : 0 \le x^2+y^2 \le 1\})$ = número de puntos de coordenadas enteras en el disco unidad = 5.

Por otro lado, $\nu_\phi((e^2,e^3]) = \nu(\{(x,y) : 2 < x^2+y^2 \le 3\}) = \nu(\{(x,y) : \sqrt{2} < \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}\})$ = número de puntos de coordenadas enteras en el anillo exterior al disco cerrado de radio $\sqrt{2}$ e interior al disco cerrado de radio $\sqrt{3}$. Este conjunto es el vacío (porque los puntos relevantes son $(0,0)$, $(0,\pm1)$, $(\pm1,0)$, $(0,\pm2)$, $(\pm2,0)$, $(\pm1,\pm1)$ y todos están fuera de ese anillo). Por tanto $\nu_\phi((e^2,e^3]) = 0$.

2.- Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y $dm = dx\,dy$ la medida de Lebesgue en X. Definimos $\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m en $\mathbb{R}$.

a) Calcular el valor de $m_\Phi([0,1])$.
b) Demostrar que m_Φ tiene la forma $dm_\Phi(y) = W(y)\,dy$ y encontrar $W(y)$ explícitamente.

SOL: **a)** Por definición, $m_\Phi([0,1]) = m(\Phi^{-1}([0,1]))$. Ahora bien,

$\Phi^{-1}([0,1]) = \{(x,y) : \Phi(x,y) \in [0,1]\} = \{(x,y) : 0 \le \ln(x^2+y^2) \le 1\} = \{(x,y) : 1 \le x^2+y^2 \le e\}$.

Se trata por tanto del anillo con radio interior 1 y radio exterior $\sqrt{e}$ de donde se deduce

$$m_\Phi([0,1]) = m(\Phi^{-1}([0,1])) = e\pi - \pi = (e-1)\pi.$$

b)

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)\,dm_\Phi(y) = \int\int_X f(\ln(x^2+y^2))dx\,dy \overset{\text{polares}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^\infty f(\ln r^2) r\,dr\,d\theta$$
$$= 2\pi \int_0^\infty f(\ln r^2) r\,dr \overset{y=\ln r^2}{=} 2\pi \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{y/2} \frac{1}{2} e^{y/2} dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\pi e^y dy.$$

Luego $W(y) = \pi e^y$.

3.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en $\mathbb{N}$. Probar que $d(\mu\times\nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m,n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n+1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\int |\, f \,|\, d(\mu\times\nu) = \infty$ y que las integrales iteradas

$$\int \Big(\int f d\mu \Big) d\nu, \qquad \int \Big(\int f\, d\nu \Big) d\mu)$$

existen y son distintas.

SOL: En primer lugar $\{m\}, \{n\} \in \mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, luego $\{m\} \times \{n\} = \{(m,n)\} \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$. Además, todo $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pertenece a $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ por ser la unión numerable de sus puntos. Se concluye por tanto que $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.
Por otro lado, $d(\mu \times \nu)(\{m\} \times \{n\}) = \mu(\{m\})\,\nu(\{n\}) = 1$ y
$d(\mu \times \nu)(A) = \displaystyle\sum_{(m,n)\in A} 1 = \operatorname{card}(A)$.
Esto nos dice que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.
En particular, cualquier función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es medible y

$$\iint_{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} f\, d(\mu \times \nu) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} f(m,n), \qquad \text{(si existe)}.$$

Si f es la función dada,

$$\iint |\, f \,|\, d(\mu \times \nu) = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} |f(m,n)| = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{n+1} 1 = \sum_{n=1}^{\infty} 2 = \infty,$$

mientras que

$$\int (\int f d\mu) d\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} f(m,n) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} (f(n,n) + f(n+1,n)) = 0,$$

y

$$\int (\int f d\nu) d\mu = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f(m,n) \right) = f(1,1) + \sum_{m=2}^{\infty} (f(m,m-1) + f(m,m)) = f(1,1) + 0 = 1.$$

4.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu)$, $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ-finitos. Sea $f : X \to \mathbb{R}$, $\mathcal{M}$ medible; $g : Y \to \mathbb{R}$, $\mathcal{N}$ medible y h definida mediante $h(x,y) = f(x)g(y)$.

a) Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible.
b) Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ entonces $h \in L^1 d(\mu \times \nu)$ y además

$$\int_{X\times Y} h\, d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f\, d\mu \right) \left(\int_Y g\, d\nu \right).$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

SOL: a) Esta es la parte más delicada. Siguiendo la sugerencia, supongamos que f y g son ambas funciones simples; es decir $f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_{A_k}(x)$, con $A_k \in \mathcal{M}$ y
$g(y) = t(y) = \sum_{j=1}^{J} d_j\, \chi_{B_j}(y)$, con $B_j \in \mathcal{N}$. Entonces, $h(x,y) = s(x)t(y)$ es medible porque

$$h(x,y) = s(x)t(y) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{j=1}^{J} c_k\, d_j \chi_{A_k}(x)\, \chi_{B_j}(y) = \sum_{k,j=1}^{K,J} c_k\, d_j \chi_{A_k \times B_j}(x,y),$$

con $A_k \times B_j \in \mathcal{M} \times \mathcal{N}$, es una función simple de la σ-álgebra $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$.
Para terminar usamos que, por ser f y g medibles en sus respectivas σ-álgebras, existen sucesiones de funciones simples $\{s_n(x)\}_n$ y $\{t_n(y)\}_n$ que convergen puntualmente a f y g respectivamente. Como $\lim_{n\to\infty} s_n(x)\, t_n(y) = f(x)\, g(y), \forall x, y$ deducimos que $h(x,y) = f(x)g(y)$ es medible.

b) Este apartado es una consecuencia del Teorema de Fubini ya que las secciones de h son $h_x(\cdot) = f(x)g(\cdot)$ y $h^y(\cdot) = f(\cdot)g(y)$ y

$$\iint_{X\times Y} |h|\, d(\mu \times \nu) = \left(\int_X |f|\, d\mu \right) \left(\int_Y |g|\, d\nu \right) < \infty.$$

5.- Sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función $\mathcal{M}$-medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ ($\mathcal{B}$ es la σ-álgebra de Borel en $\mathbb{R}$). *Sugerencia:* empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en $(X, \mathcal{M})$ σ-finita, probar que $\int_X f\, d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = d\mu \otimes dy$ del conjunto A_f.

SOL: a) Si empezamos con la función simple $f(x) = s(x) = \sum_{k=1}^{K} c_k\, \chi_{B_k}(x)$, con $B_k \in \mathcal{M}$ disjuntos y $c_k > 0$, se tiene $A_s = \sum_{k=1}^{K} B_k \times [0, c_k)$ que claramente es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$-medible porque $B_k \times [0, c_k) \in \mathcal{M} \times \mathcal{B}$. Además (con $dy = dm$ la medida usual de Lebesgue)

$$d(\mu \times m)(A_s) = \sum_{k=1}^{K} \mu(B_k) \cdot c_k = \int_X s\, d\mu.$$

Para la f dada, elegimos (*lema técnico*) una sucesión creciente de funciones simples positivas $\{s_n(x)\}_n$ con $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x), \forall x$. Entonces $A_f = \bigcup_{n\geq 1} A_{s_n}$, luego A_f es medible.

b) Por el TCM se cumple

$$d(\mu \times \nu)(A_f) = \lim_{n\to\infty} d(\mu \times \nu)(A_{s_n}) = \lim_{n\to\infty} \int_X s_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu, \qquad \text{q.e.d.}$$

6.- Sea $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en [0,1]), μ la **medida de Lebesgue** en $\mathcal{A}_1$, ν la **medida de contar** en $\mathcal{A}_2$. En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x, y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y que $(\mu \times \nu)(V) = +\infty$. Sin embargo

$$\int_Y d\nu \int_X \chi_V\, d\mu = 0, \qquad \int_X d\mu \int_Y \chi_V\, d\nu = 1.$$

Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ-finitas no se puede quitar del enunciado del Teorema de Fubini.
Sugerencia: Si $V_n = (I_1^j \times I_1^j) \cup \ldots \cup (I_n^j \times I_n^j)$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \ldots 2^n$, entonces $V = \cap_1^\infty V_n$.

SOL: Como cada $V_n \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, y V es la intersección numerable de ellos, se tiene $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ también.

Para demostrar que $(\mu \times \nu)(V) = +\infty$, utilizamos la definición:

$$(\mu \times \nu)(V) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)\nu(J_k) : \quad I_k, J_k \in \mathcal{B}_{[0,1]}, \cup_k I_k \times J_k \supset V \right\}.$$

Supongamos que tenemos un recubrimiento de V por una unión de rectángulos medibles $I_k \times J_k$. Tenemos que ver que $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(I_k)\nu(J_k) = +\infty$. Basta encontrar un índice k tal que $\mu(I_k) > 0$ y $\nu(J_k) = +\infty$, es decir, J_k es infinito. Sea S el conjunto de índices k tales que $\mu(I_k) = 0$ o J_k es finito o numerable, y sea $Q = \bigcup_{k\in S}(I_k \cap J_k)$; es un subconjunto de $[0, 1]$ de medida de Lebesgue 0. Entonces la unión

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}\setminus S} I_k \times J_k$$

cubre el conjunto $V' = \{(x, y) : x = y, x \in [0, 1] \setminus Q\}$. Haciendo la projección sobre el eje y, obtenemos que $\cup_{k\in\mathbb{N}\setminus S} J_k$ cubre el conjunto no numerable $x \in [0, 1] \setminus Q$. Como el conjunto de índices $\mathbb{N} \setminus S$ es numerable, se sigue que para algún $k \in \mathbb{N} \setminus S$, J_k es no numerable y en particular, es infinito. Como $k \notin S$, $\mu(I_k) > 0$, lo que demuestra nuestra afirmación.

Finalmente, si $\mu = m$ es la medida de Lebesgue tenemos para $y \in [0,1]$

$$\int_X \chi_V(x,y)d\mu(x) = \int_{\{y\}} 1\, dm = m(\{y\}) = 0, \text{ luego } \int_Y \left(\int_X \chi_V(x,y)d\mu(x)\right) d\nu(y) = 0,$$

mientras que, si $x \in [0,1]$,

$$\int_Y \chi_V(x,y)d\nu(y) = \nu(\{x\}) = 1, \quad \text{luego} \quad \int_X \left(\int_Y \chi_V(x,y)d\nu(y)\right) d\mu(x) = \int_0^1 1\, dx = 1.$$

7.- Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathrm{d}m)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(x-y)g(y)$ es integrable en y para casi todo x. Para estos valores de x, ponemos $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,\mathrm{d}m(y)$. Se dice que h es *la convolución* de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1\|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h|\,\mathrm{d}m$.

SOL: La función de dos variables $F(x,y) = f(y-x)$ es medible, porque para todo conjunto Δ medible en $\mathbb{R}$, el subconjunto $\{(x,y) : y - x \in \Delta\}$ de $\mathbb{R}^2$ es medible. Por tanto, las función $H(x,y) = f(y-x)g(x)$ y es medible. Aplicando el Teorema de Tonelli a la función positiva y medible $|H|$, vemos que

$$\int |H(x,y)|\, dm(x)\, dm(y) \leq \int |g(x)| \Big(\int |f(y-x)|\, dm(y)\Big)\, dm(x) = \int |g|\, dm \cdot \int |f|\, dm.$$

Por tanto, H es integrable en $\mathbb{R}^2$. Por el Teorema de Fubini, $h(y) = \int f(y-x)g(x)\, dm(x)$ está definida en c.t.p. Además, se obtiene

$$\begin{aligned}\|h\|_1 = \int |h(y)|\, dm(y) &\leq \int \Big(\int |f(y-x)g(x)|\, dm(x)\Big)\, dm(y)\\ &= \int |g(x)| \Big(\int |f(y-x)|\, dm(y)\Big)\, dm(x) = \|f\|_1\|g\|_1.\end{aligned}$$

8.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Comprobar que $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dy\Big)\, dx = \frac{\pi}{4}$ y que $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dx\Big)\, dy = -\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el teorema de Fubini?

SOL: Ver los apuntes de clase.

9.- Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1,1] \times [-1,1]$. ¿Qué hipotesis no se verifica en el Teorema de Fubini?

SOL: Las integrales iteradas valen 0 porque tanto f_x como f^y son integrables (continuas y acotadas), impares y el dominio de integración es simétrico. f no es integrable porque

$$\iint_{[-1,1]\times[-1,1]} |f(x,y)| dxdy = 4\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(x^2+y^2)^2} dxdy = 2\int_0^1 \frac{1}{y(1+y^2)} dy = \infty.$$
