Teoría de la integral y de la medida, 2021-22
Hoja n^0 5 *(Medidas exteriores)* 11 de diciembre de 2023

1.- Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ mediante $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \emptyset$, $A \subset X$. Comprobar que μ^* es una medida exterior. Determinar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

SOL: $\mathcal{A}^* = \{\emptyset, X\}$.

2.- Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$, $\mu^*(A) = 1$ para $A \neq \emptyset$, $A \neq X$. Comprobar que μ^* es una medida exterior. Determinar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

SOL: Si $\mathrm{card}(X) = 2$, i.e. $X = \{a, b\}$, entonces $\mathcal{A}^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, X\} = \mathcal{P}(X)$.
Si $\mathrm{card}(X) > 2$, entonces $\mathcal{A}^* = \{\emptyset, X\}$.

3.- Comprobar que si μ^* es una medida exterior finitamente aditiva entonces es numerablemente aditiva.

SOL: Observamos que, si μ^* es finitamente aditiva, entonces $\forall E, A \subset X$ se cumple $\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E)$. Luego se tiene $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(X)$. En particular μ^* no solo es una medida exterior sino, de hecho, una medida.

4.- Sea μ^* una medida exterior, sea H un conjunto μ^*-medible, sea μ^*_H la restricción de μ^* a $\mathcal{P}(H)$.
a) Comprobar que μ^*_H es una medida exterior en H.
b) Comprobar que $A \subset H$ es μ^*_H-medible si y solo si es μ^*-medible

SOL: a) Obvio.
b) Definimos

$$\mathcal{B}^* = \{A \subset H : \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E), \quad \forall E \subset H\}.$$

Queremos probar que $A \in \mathcal{B}^* \iff A \subset H, \text{ y } A \in \mathcal{A}^*$.
$\Longleftarrow$ Esta parte es evidente.
$\Longrightarrow$ Suponemos ahora que $A \in \mathcal{B}^*$. Dado $E \subset X$, necesitamos ver que

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E).$$

Definimos $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap (H \setminus A)$, $E_3 = E \cap H^c$ ( ), de forma que $E \cap A^c = E_2 \cup E_3$. Por ser $H \in \mathcal{A}^*$, tenemos $\mu^*(E) = \mu^*(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \mu^*(E_1 \cup E_2) + \mu^*(E_3)$ y por otro lado, por ser $A \in \mathcal{B}^*$, $\mu^*(E_1 \cup E_2) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2)$. Luego, $\mu^*(E) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \mu^*(E_3)$. De esta forma llegamos a

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2 \cup E_3) \leq \mu^*(E_1) + \mu^*(E_2) + \mu^*(E_3) = \mu^*(E),$$

q.e.d.

5.- Si en el ejercicio 4) se suprime la hipótesis de que H sea μ^*-medible, ¿qué partes seguirían siendo ciertas y cuales fallarían?

SOL: Son ciertos a) y la implicación $A \subset H, \text{ y } A \in \mathcal{A}^* \implies A \in \mathcal{B}^*$ de b).

6.- Sea μ^* una medida exterior, sean $\{A_j\}$ una sucesión de conjuntos μ^*-medibles disjuntos. Probar que

$$\mu^*\Big(E \cap \Big(\bigcup_1^\infty A_j\Big)\Big) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j), \quad \forall E \subset X.$$

Esto aparece en la demostración del Teorema de Caratheodory. (Sugerencia: Empezar considerando que A_1 es medible y tomando como conjunto de prueba $E \cap (\cup_1^\infty A_j)$.)

SOL: Ver la demostración del Teor. Caratheodory 1 en los apuntes de F. Soria

---

7.- Variando si es necesario en cada caso el tamaño de los intervalos, construir un conjunto de tipo Cantor de medida de Lebesgue mayor que $1 - \epsilon$.

SOL: Visto en clase.

8.- Sea X un conjunto con un número infinito de elementos. Tomemos como clase recubridora $\mathcal{C}$, la formada por el vacío, el total y los conjuntos con un único elemento. Definimos $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(X) = \infty$, $\rho(E) = 1$, si $E \in \mathcal{C}$, $E \neq \emptyset$, X. Describir la medida exterior así obtenida. Estudiar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

SOL: 1) Si $E \subset X$ es finito entonces el mejor cubrimiento de E por elementos de $\mathcal{C}$ viene dado por $\{\{x\}\}_{x\in E}$. En este caso $\mu^*(E) = \sum_{x\in E} \rho(\{x\}) = \sum_{x\in E} 1 = \mathrm{card}(E)$. Si E contiene infinitos elementos -tanto numerable o no- entonces $\mu^*(E) = \infty$ porque cualquier cubrimiento por $\mathcal{C}$ debe tener bien los conjuntos de un único punto de E (caso numerable) o bien X (caso no numerable). μ^* es la que hemos denominado "*medida de contar*".

2) μ^* es una medida exterior "finitamente aditiva", porque si A y B son disjuntos $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ (probarlo considerando los casos i) A y B ambos finitos y ii) cuando uno de los dos no lo es). Por el ejercicio 3, $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(X)$.

9.- Sea X un conjunto no-numerable. Sea $\mathcal{C}$ la σ - álgebra formada por los conjuntos numerables y no-numerables de complementario numerable.
Sea $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ definida mediante $\mu(E) = \mathrm{card}\ E$, si E es finito, $\mu(E) = \infty$ en otro caso.

a) Probar que μ es una medida completa en $\mathcal{C}$.
b) Estudiar la medida μ^* construida a partir de $\mathcal{C}$ y μ.

SOL: a) μ es la "*medida de contar*" sobre la σ-álgebra $\mathcal{C}$, y es completa porque el único conjunto de medida nula es $\emptyset$.

b) La medida μ^* construida a partir de $\mathcal{C}$ y μ vuelve a ser "finitamente aditiva", como en el ejercicio anterior y por tanto, de nuevo, $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(X)$.

10.- Sea $X = [M, N]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, y sea f una función continua y positiva en $[M, N]$. Consideramos la clase recubridora $\mathcal{D}$, que consiste de $\emptyset$ e intervalos cerrados contenidos en X. Definimos la función $\rho : \mathcal{D} \to [0, +\infty)$, poniendo $\rho(\emptyset) = 0$ y

$$\rho([c, d]) = (\max_{[c,d]} f) \cdot (d - c), \quad [c, d] \subset [M, N].$$

a) Calcular la correspondiente medida exterior $\rho^*([c, d])$ para todo subintervalo $[c, d] \subseteq [M, N]$.

b) Demostrar que un subconjunto A de $[M, N]$ es ρ^*-medible si y solo si es Lebesgue medible.

c) Sean g, h dos funciones continuas positivas sobre M, N, y vamos a definir ρ por la fórmula

$$\rho([c,d]) = \begin{cases} (\text{máx}_{[c,d]}\, g) \cdot (d-c), & \text{si } c, d \text{ son irracionales}, \\ (\text{máx}_{[c,d]}\, h) \cdot (d-c), & \text{si } c \text{ ó } d \text{ es racional}. \end{cases}$$

¿Cómo será la medida exterior ρ^* en este caso?

SOL: En a), aplicar las sumas superiores $U_f(\mathcal{P})$ para deducir que

$$\rho^*([c,d]) = \int_c^d f(x)\, dx.$$

En particular, ρ^* coincide en los intervalos con la medida dF, donde F es cualquier antiderivada de f en $[M, N]$.

Sea $\alpha = \text{mín}_{[M,N]} f$, $\beta = \text{máx}_{[M,N]} f$, de forma que $0 < \alpha \le \beta < +\infty$. Denotamos por μ^* la medida exterior de Lebesgue. Para obtener b), notar que $\alpha\mu^*(A) \le \rho^*(A) \le \beta\mu^*(A)$, para todo conjunto $A \subset [M, N]$. Usar luego que todo conjunto de Borel es medible tanto respecto de ρ^* como respecto de μ^*, y que un conjunto arbitrario $A \subset [M, N]$ es ρ^*- (o μ^*-medible) si y solo si se representa como $A = B \cup D$, donde B, F son de Borel, $D \subset F$ y además $\rho^*(F) = 0$ (respectivamente, $\mu^*(F) = 0$).

En c), cambiando un poco los extremos de los intervalos que cubren un conjunto dado, es fácil ver que la medida exterior ρ^* coincide con la medida exterior asociada a la función $\widetilde{\rho} : \mathcal{D} \to [0, +\infty)$, que corresponde a la función $f(x) = \text{mín}(g(x), h(x))$.

11.- Sea $X = [0, 1]$, consideramos la colección $\mathcal{D}$, que consiste de $\emptyset$ e intervalos cerrados contenidos en X. Elegimos un parámetro $\alpha > 0$ y definimos la función $\rho : \mathcal{D} \to [0, +\infty)$,

$$\rho(\emptyset) = 0,\ \rho([a,b]) = (b-a)^\alpha, \quad [a,b] \subset [0,1],$$

Sea ρ^* la correspondiente medida exterior. Para $\alpha = 1$, es la medida exterior de Lebesgue.

a) Calcular $\rho^*([a, b])$ si $\alpha > 1$. Demostrar que en este caso, todo subconjunto de $[0, 1]$ es ρ^*-medible.

b) Supongamos ahora que $0 < \alpha < 1$. Demostrar que entonces $\rho^*([a, b]) = \rho([a, b])$. Comprobar que en este caso, un intervalo $[a, b] \ne [0, 1]$ nunca es ρ^*-medible. ¿Existen conjuntos ρ^*-medibles, distintos de $\emptyset$ y $[0, 1]$? ¿Existe un conjunto $A \subset [0, 1]$ ρ^*-medible, tal que tanto A como A^c no son numerables?

c)* Demostrar que en el caso cuando $\alpha \in (0, 1)$, un subconjunto $A \subset [0, 1]$ es ρ^*-medible si y solo si $\rho^*(A) = 0$ o $\rho^*(A^c) = 0$.

SOL: a) Se obtiene cubriendo $[a, b]$ con n intervalos de longitud $(b - a)/n$ y haciendo n tender a ∞. Como consecuencia directa, cualquier subconjunto de $[0, 1]$ tiene medida exterior igual a 0 y por esto es medible.

b) Si $\alpha < 1$, la desigualdad triangular implica que la forma más económica de recubrir un intervalo $[a, b]$ por intervalos cerrados es cogiendo un solo intervalo $[a, b]$. Luego $\rho^*([a, b]) = (b - a)^\alpha$. Utilizando la monotonía de ρ^*, se ve que ρ^* toma el mismo valor en $(a, b), [a, b)$ y $(a, b]$.

Si un intervalo $[a, b]$ es medible, entonces $1 = \rho^*([0, 1]) = \rho^*([a, b]) + \rho^*([0, 1] \setminus [a, b])$. Se ve que

$$\rho^*([0,a) \cup (b,1]) = \text{mín}\big((1-b)^\alpha + a^\alpha, 1\big).$$

Considerando los casos cuando $0 < a < b < 1$, y cuando $a = 0$ o $b = 1$, se obtiene que ningún intervalo $[a, b]$ con $0 < b - a < 1$ es medible.

Como $\rho^*(\{a\}) = 0$ para todo a y los conjuntos ρ^*-medibles forman un σ-álgebra, cualquier conjunto finito o numerable es ρ^*-medible. Lo son también sus complementos. Para responder a la última pregunta, basta encontrar un conjunto $A \subset [0,1]$ tal que A y A^c no son numerables y además $\rho^*(A) = 0$. Se puede constuirlo como un conjunto de Cantor generalizado, quitando en cada paso las partes centrales de los intervalos de proporción cada vez más cercana a 1. Entonces para todo n, A se puede recubrir por 2^n intervalos de longitud ℓ_n, donde la sucesión ℓ_n tiende a cero muy rápido. Si $2^n \cdot \ell_n^\alpha \to 0$, $n \to \infty$, entonces $\rho^*(A) = 0$.

c) Si $\rho^*(A) = 0$ o $\rho^*(A^c) = 0$, entonces se sigue de la teoría que A es ρ^*-medible. Supongamos ahora que A es ρ^*-medible. En particular, $1 = \rho^*([0,1]) = \rho^*(A) + \rho^*(A^c)$. Denotamos por μ^* la medida exterior de Lebesgue. Supongamos que $\max(\rho^*(A), \rho^*(A^c)) < u < 1$. Entonces es fácil ver que $\rho^*(A) \geq v\mu^*(A)$, donde $v = u^{(1-\alpha)/\alpha}$. De la misma forma, $\rho^*(A^c) \geq v\mu^*(A^c)$. Luego

$$1 = \rho^*(A) + \rho^*(A^c) \geq v(\rho^*(A) + \rho^*(A^c)) \geq v(\mu^*(A) + \mu^*(A^c)) \geq v\mu^*([0,1])) > 1.$$

Esta contradición demuestra que se tiene que cumplir $\rho^*(A) = 0$ o $\rho^*(A^c) = 0$.