Teoría de la integral y de la medida, 2021-22

Hoja nº 8 *(Teorema de Radon-Nikodym)* **SOLUCIONES**

1.- Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ν la medida de contar en $\mathbb{N}$ y $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{2^n}$. Comprobar que $\nu \ll \mu$, sin embargo no se verifica la condición de que dado $\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon$, $E \in \mathcal{A}$.

SOL.: : Si $\mu(E) = 0$ entonces E no contiene ningún entero positivo y por tanto $\nu(E) = 0$. Luego $\nu \ll \mu$. Si llamamos $E_n = \{n\}$ entonces $\mu(E_n) = \frac{1}{2^n} \to 0$ pero $\nu(E_n) = 1, \forall n$, luego no se cumple la condición ϵ / δ de la continuidad absoluta. El motivo es que ν no es una medida finita.

2.- Sea $X = [0, 1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m la medida de Lebesgue en $\mathcal{A}$, μ la medida de contar en $\mathcal{A}$. Probar:

a) $m \ll \mu$ pero $\mathrm{d}m \neq f\mathrm{d}\mu$ para toda f.

b) μ no tiene descomposición de Lebesgue respecto de m.

SOL.: : a) Si $\mu(A) = 0$ entonces $A = \emptyset$ y por tanto $m(\emptyset) = 0$ también. Luego $m \ll \mu$. Sin embargo, dado una función f cualquiera, si $f(x_0) \neq 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$ se tiene, para $A = \{x_0\}$, $\displaystyle\int_A f d\mu = f(x_0)$ mientras que $m(A) = 0$. El motivo es que μ no es σ-finita.

3.- Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\mathcal{B}$ una σ-subálgebra de $\mathcal{A}$ y sea ν la restricción de μ a $\mathcal{B}$. Supongamos que ν es σ-finita. Si $f \in L^1(\mu)$ demostrar que existe g $\mathcal{B}$-medible, $g \in L^1(\nu)$ tal que $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\nu$ para todo $E \in \mathcal{B}$, además g es única módulo alteraciones en conjuntos ν-nulos. (A la función g se le llama en probabilidad $E(f|\mathcal{B})$, esperanza condicionada de f con respecto $\mathcal{B}$).

Indicación: Aplicar el Teorema de Radon-Nikodym a las medidas $\mu_0 = \nu$ como la medida σ-finita y $\nu_0 = f\mathrm{d}\mu$, ambas definidas solo sobre $\mathcal{B}$.

SOL.: : Utilizaremos el Teorema de Radon-Nikodym sobre la σ-álgebra $\mathcal{B}$ usando $\mu_0 = \nu$ como la medida σ-finita y $\nu_0 = fd\mu$, ambas definidas solo sobre $\mathcal{B}$. Claramente $\nu_0 \ll \mu_0$ y ν_0 es finita porque f es integrable. Por el teorema, existe una $g \in L^1(d\nu)$ tal que $fd\mu = \nu_0 = gd\nu$, es decir

$$\int_E f d\mu = \int_E g d\nu, \quad \forall E \in \mathcal{B},$$

como queríamos. Aquí lo importante es que g es $\mathcal{B}$-medible. Esto es más restrictivo que ser $\mathcal{A}$-medible, que es lo que era f.

4.- Probar que si una medida λ en $\mathbb{R}$ tiene soporte en un conjunto numerable $\{x_j\}_j$, entonces existen constantes c_j tales que $\lambda(E) = \sum_j c_j\chi_E(x_j)$, es decir $\lambda = \sum_j c_j\delta_{x_j}$ (δ_a representa la delta de Dirac en el punto $x = a$).

SOL.: : Por hipótesis, $\lambda(\mathbb{R} \setminus \{x_j\}_j) = 0$. En particular
$\lambda(E) = \lambda\left(E \bigcap \{x_j\}_j\right) = \displaystyle\sum_{x_j\in E} \lambda(x_j) = \sum_j \lambda(x_j)\chi_E(x_j)$. El resultado se sigue de tomar $c_j = \lambda(x_j)$.

5.- Sean ν y λ medidas (finitas) definidas sobre una misma σ-álgebra. Probar que si se tiene a la vez $\lambda \perp \nu$ y $\lambda \ll \nu$, entonces $\lambda \equiv 0$.

SOL.: : Por ser $\lambda \perp \nu$, existe un conjunto E medible tal que $\lambda(E) = 0$ y $\nu(E^c) = 0$. Pero, al ser $\lambda \ll \nu$, $\nu(E^c) = 0$ implica que $\lambda(E^c) = 0$ también. Luego $\lambda(X) = \lambda(E) + \lambda(E^c) = 0$.

6.- Se dice que una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dadas dos sucesiones de números $\{a_k\}_k$ y $\{b_k\}_k$, con $a_k < b_k$, $\forall k$, entonces

$$\sum_{k\geq 1} |b_k - a_k| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k\geq 1} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon.$$

(Ver ejercicio 8 de la hoja 4). Probar que si F es absolutamente continua y, además, creciente entonces la medida de Lebesgue-Stieltjes dF es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue dx en $\mathbb{R}$.

SOL.: : Queremos ver que si A es de Borel y $m(A) = 0$ entonces $dF(A) = 0$. Dado $\epsilon > 0$, tomando el δ de la definición de función absolutamente continua y usando que $dx = m$ es una medida regular, existe un abierto $U \supset A$ con $m(U) < \delta$. Como U es la unión disjunta de intervalos abiertos, $U = \bigcup_k (a_k - b_k)$ se deduce que $\sum_{k\geq 1} |b_k - a_k| = m(U) < \delta$. De aquí obtenemos

$$dF(A) \leq dF(U) = \sum_{k\geq 1} dF((a_k - b_k)) = \sum_{k\geq 1} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon,$$

donde hemos usado, en la segunda identidad, que F es continua. Es decir, $dF(A) < \epsilon, \forall \epsilon > 0$ y, por tanto, $dF(A) = 0$ como queríamos