Teoría de la integral y de la medida, 2021-22
Hoja n^0 6 *(Medidas de Lebesgue-Stieltjes)* 11 de diciembre de 2023

1.- Definimos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \le x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \ge 3 \end{cases}$$

Sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a F. Calcular: $dF(\{1\})$, $dF(\{2\}$, $dF((1,3])$, $dF((1,3))$, $dF([1,3])$, $dF([1,3))$.

SOL: $dF\{1\} = F(1) - F(1^-) = 1$, $dF\{2\} = 0$, $dF\{(1,3]\} = F(3) - F(1) = 3$, $dF\{(1,3)\} = F(3^-) - F(1) = 2$, $dF\{[1,3]\} = F(3) - F(1^-) = 4$, $dF\{[1,3)\} = F(3^-) - F(1^-) = 3$.

2.- Dar un ejemplo de una función de distribución F tal que

$$dF(a,b) < F(b) - F(a) < dF[a,b]$$

para algunos a y b siendo dF la medida correspondiente a F.

SOL: Ver ejercicio anterior.

3.- Sea μ la medida de contar sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$, definimos $\nu(B) = \mu(B \cap A)$ para todo $B \subset \mathbb{R}$.
a) Si $A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ ¿es ν una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.
b) Si $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ ¿es ν una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

SOL: a) Sí, por ser finita sobre conjuntos acotados: $\nu((a,b]) = \sum_{n\in(a,b]} 1 < \infty$. Además:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ [x], & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

b) No, por no ser finita sobre conjuntos acotados: $\nu((0,1]) = \sum_{\{n: 1/n \in (0,1]\}} 1 = \infty$.

4.- Sea $F(x)$ la función de distribución sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 1 + x & \text{si} \quad x \in [-1, 0) \\ 2 + x^2 & \text{si} \quad x \in [0, 2) \\ 9 & \text{si} \quad x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Si dF es la medida de Lebesgue Stieltjes correspondiente a F, hallar la medida dF de los siguientes conjuntos: $\{2\}$, $[-1/2, 3)$, $(-1, 0] \cup (1, 2)$, $[0, 1/2) \cup (1, 2]$, $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

SOL: Semejante al ejercicio 1.
Calculamos solo la medida de $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\} = (-\infty, -1/2) \bigcup (1/2, \infty)$:
$\nu(A) = F(+\infty) - F(1/2) + F(-1/2^-) - F(-\infty) = 9 - 9/4 + 1/2 = 29/4$

5.- a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no-negativa e integrable Lebesgue y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Probar que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ es una función de distribución de probabilidad y ademas F es continua. (f se denomina **función de densidad**)

b) Si $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0,1], \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$ hallar $F(x)$.

SOL: a) F es creciente (por ser f positiva) y continua porque

$$\begin{cases} \lim\limits_{h\to 0^+} (F(x+h)-F(x)) & = \lim\limits_{h\to 0^+} \displaystyle\int_x^{x+h} f(t)\,dt = 0, \\ \lim\limits_{h\to 0^+} (F(x-h)-F(x)) & = \lim\limits_{h\to 0^+} \displaystyle\int_{x-h}^{x} f(t)\,dt = 0, \end{cases} \quad \text{ambos por T.C.D.}$$

b) $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad x \le 0, \\ x, & \text{si} \quad 0 \le x \le 1, \\ 1, & \text{si} \quad x \ge 1. \end{cases}$

6.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & \text{si} \quad x \in [0,1] \quad k > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determinar el valor de k para que f sea la función de densidad de una medida de probabilidad. Determinar la función de distribución.

SOL: $k = 6, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3, & \text{si } 0 \le x < 1, \\ 1, & \text{si } x \ge 1. \end{cases}$

7.- Supongamos que la función de probabilidad que mide la duración en minutos de las conferencias telefónicas viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-kx}, & \text{si} \quad x \ge 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo $k \ge 0$ una constante conocida.
a) Hallar α para que f sea una densidad de probabilidad.
b) Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure mas de tres minutos.
c) Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.

SOL: a) $\alpha = k$.

b) $P(X > 3) = \displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = e^{-\frac{3}{2}}$, c) $P(3 < X < 6) = \displaystyle\int_3^6 \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x} dx = e^{-\frac{3}{2}} - e^{-3}$.

8.- Dada la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad x \in [-1, \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} + \frac{x-\sqrt{2}}{10} & \text{si} \quad x \in [\sqrt{2}, 5) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [5, \infty) \end{cases}$$

Si dF es la medida de probabilidad correspondiente, calcular la medida de los conjuntos: $\mathbb{R}$; $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [\sqrt{2}, 5]$; $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-2, \sqrt{2}]$; $\mathbb{Q} \cap [1, 6]$.

SOL: Observamos primero que $dF(\mathbb{Q}) = dF(\{-1\}) + dF(\{5\}) = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{10}$, porque F es continua en todos los puntos racionales salvo en -1 y en 5. Deducimos:
$dF(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) = 1$,
$dF((\mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [\sqrt{2}, 5]) = dF([\sqrt{2}, 5)) = F(5^-) - F(\sqrt{2}^-) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{10} - \frac{1}{3}$,
$dF((\mathbb{R} \setminus \mathbf{Q}) \cap [-2, \sqrt{2}]) = dF([-2, \sqrt{2}]) - dF(\{-1\}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.
$dF(\mathbf{Q} \cap [1, 6]) = dF(\{5\}) = \frac{\sqrt{2}}{10}$

9.- Sea F una función de distribución en $\mathbb{R}$. a) Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de F es numerable. b) Probar que el conjunto de puntos de continuidad es denso en $\mathbb{R}$.

(Sugerencia: F es monótona luego en sus puntos de discontinuidad hay saltos).

SOL: En cada punto de discontinuidad z podemos elegir un $q_z \in \mathbb{Q}$ tal que $F(z^-) < q_z < F(z)$. Por ser F creciente, estos q_z son todos distintos, luego a lo sumo hay un número numerable de discontinuidades.

10.- Sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ correspondiente a una función de distribución continua F no trivial.

a) Probar que si A es numerable entonces $dF(A) = 0$.

b) Probar que existen conjuntos A tales que $dF(A) > 0$ y A no contiene ningún intervalo abierto.

c) Si $dF(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, ¿ tiene que ser A denso en $\mathbb{R}$?

Sugerencia: Para c) construir una función $F(x)$ que sea constante en un intervalo.

SOL: a) Por ser A numerable se tiene $dF(A) = \sum_{x \in A} dF(\{x\})$. Esta suma vale 0 por ser F continua $\forall x$.

11.- Sea $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ la función de distribución definida mediante $F(x) = \log(1+x)$, sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a F. Calcular dF $\{\text{Cantor}\}$.

Sugerencia: El conjunto de Cantor está contenido en 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$.

SOL: Lo hacemos directamente sin seguir la sugerencia: como F es derivable en $(0, \infty]$, se tiene $dF(x) = f(x)\,dx$ con $f(x) = F'(x) = \frac{1}{1+x}$, si $x > 0$ y $f(x) = 0$ si $x < 0$. De esta forma concluimos que

$$dF(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} f(x)\,dx = \int_{\mathcal{C}} \frac{1}{1+x}\,dx = 0,$$

porque el conjunto de Cantor tiene medida 0 con respecto a la medida de Lebesgue.

12.- Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de distribución y sea $G \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Supongamos que F es localmente constante en G (esto equivale a decir que F es constante sobre cualquier intervalo abierto, contenido en G). Demostrar que $\mu_F^*(G) = 0$, donde μ_F es la medida de Lebesgue-Stiltjes asociada. Deducir que en este caso, cualquier subconjunto de G es medible respecto de μ_F.

SOL: G es una unión numerable de intervalos abiertos I_j. Se obtiene de forma directa que $\mu_F(I_j) = 0$ para todo j (representar I_j como una unión numerable de intervalos semiabiertos). De aquí se siguen fácilmente el resto de las afirmaciones.