
Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2021-22)

Hoja nº 4 **SOLUCIONES**

1. Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida mediante $f(x) = 0$ si x es racional, $f(x) = n$ si n es el número de ceros inmediatamente después del punto decimal en la representación de x en la escala decimal. Calcular $\int f \, dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: Por la definición que nos dan, se tiene que $f(x) = n$ en el conjunto $I_n = (10^{-n-1}, 10^{-n}] \cap \mathbb{Q}^c$. De esta forma podemos escribir $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \chi_{I_n}(x)$. Usando que la medida de Lebesgue de I_n es la misma que la del intervalo $\tilde{I}_n = (10^{-n-1}, 10^{-n}]$, es decir, $9/10^{n+1}$ su integral es

$$\int f \, dm = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{9}{10} \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{10^n} = \frac{9}{10} \frac{1/10}{(1 - 1/10)^2} = \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9}.$$

-
2. Sea $f(x)$ la función definida en $(0, 1)$ mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = [\frac{1}{x}]$ si x es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular $\int f(x) \, dm$ siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: Observamos primero que $[y] \geq y - 1$. Como el conjunto de números racionales tiene medida 0 con respecto a la medida de Lebesgue, se sigue que $f(x) \geq \frac{1}{x} - 1$ c.t.p. Por tanto

$$\int f \, dm \geq \int_0^1 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) dx = \infty.$$

-
3. Comprobar que $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} \, dm = \infty$, siendo m la medida de Lebesgue.

-
4. Sea $f_n(x) = \min(f(x), n)$ siendo $f(x) \geq 0$ y medible. Demostrar que $\int f_n \, d\mu \uparrow \int f \, d\mu$.

SOL: Basta observar que $\{f_n\}_n$ es una sucesión creciente de funciones medibles y que $\lim f_n(x) = f(x)$ puntualmente $\forall x$. A continuación se usa el TCM.

-
5. Sean f_n funciones medible no negativas y acotadas. Supongamos que $f_n(x) \downarrow f(x)$ y que para algún k se verifica $\int f_k \, d\mu < \infty$. Probar que (**TCM para sucesiones decrecientes**):

$$\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu.$$

(Sugerencia: Formar la sucesión $g_n = f_k - f_{k+n}$).

SOL: La sucesión $\{g_n\}_n$ es creciente y cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = f_k(x) - f(x), \forall x$. Por el TCM,

$$\int f_k \, d\mu - \int f \, d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int (f_k - f_{k+n}) \, d\mu = \int f_k \, d\mu - \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n \, d\mu.$$

Despejando queda el resultado.

-
6. Sea $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3, \dots, \geq a_n, \dots$, una sucesión de números positivos tales que $\lim a_n = 0$. Sea $f_n(x) = a_n/x$ para $x \geq a > 0$. Comprobar que f_n decrece a cero uniformemente pero $\int_a^{\infty} f_n \, dm = \infty$ para todo n .
-

7. Sea $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$, definida mediante

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que $f_n \rightarrow 0$ puntualmente, pero $\int f_n dm = 1$.

8. Sea $f(x) = 0$ en cada punto del conjunto ternario de Cantor en $[0, 1]$. Sea $f(x) = p$ en cada intervalo del complementario de longitud $\frac{1}{3^p}$. Demostrar que f es medible y calcular $\int_{[0,1]} f dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

SOL: El complementario del conjunto de Cantor en $[0, 1]$ viene dado por un abierto de la forma $\bigcup_{p=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{p-1}} I_{p,k}$, donde los $I_{p,k}$ son intervalos abiertos disjuntos cada uno de medida 3^{-p} . La función f se puede escribir como

$$f(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} p \chi_{I_{p,k}}(x),$$

y su integral vale por tanto

$$\int f dm = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{p-1}} p m(I_{p,k}) = \sum_{p=1}^{\infty} p \frac{2^{p-1}}{3^p} = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p \left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{1}{2} \frac{2/3}{(1 - 2/3)^2} = 3.$$

9. Llamemos $d_i(x)$ a los dígitos del desarrollo decimal $0.d_1d_2\dots$ de un $x \in (0, 1)$. Decir por qué son convergentes las series

$$f(x) = \sum_i d_i(x)/2^i, \quad g(x) = \sum_i (-1)^{d_i(x)}/2^i,$$

y hallar $\int_0^1 f$ y $\int_0^1 g$, expresándolas como sumas de series. ¿Por qué son válidas esas expresiones?

SOL: $\int_0^1 f(x) dx = \frac{9}{2}$ y $\int_0^1 g(x) dx = 0$, que ya veremos con calma ...

10. Sea $f_{2n-1} = \chi_{[0,1]}$, $f_{2n} = \chi_{(1,2]}$, $n = 1, 2, \dots$. Comprobar que se verifica la desigualdad de Fatou estrictamente.

SOL: $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ porque $f_n(x) = 0$ bien si n es par o bien si n es impar. Por tanto $\int \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n(x) dx = 1$.

11. Sean $f \geq 0$, $g \geq 0$ medibles, $f \geq g$, $\int g d\mu < \infty$. Demostrar que

$$\int f d\mu - \int g d\mu = \int (f - g) d\mu.$$

12. Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida. Sea $\{f_n\}$ una sucesión creciente de funciones medibles de X en \mathbb{R} :

$$f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$$

Ponemos $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in (-\infty, +\infty]$.

a) Demostrar que $\lim_n \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$ si f_1 es integrable.

b) Dar un ejemplo en el que $\int_X f_n d\mu = -\infty$ para todo n , mientras que $\int_X f d\mu = 0$.

SOL: a) Aplicar el TCM a funciones $f_n - f_1 \geq 0$. b) $X = \mathbb{R}$, μ es la medida de Lebesgue, f_n son funciones constantes: $f_n(x) = -1/n$, $x \in \mathbb{R}$.

13. Sea $f_n \geq 0$ medible, $\lim f_n = f$, $f_n \leq f$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Comprobar que $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.

Sugerencia: Usar el lema de Fatou y que $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

SOL: Por el Lema de Fatou y las hipótesis, $\int f d\mu = \int \lim f_n d\mu \leq \liminf \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$.

14. Sea $g : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ integrable. Sea $\{E_n\}$ una sucesión decreciente de conjuntos tal que $\cap_1^\infty E_n = \emptyset$. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{E_n} g d\mu = 0$.

SOL: Usar TCD con $f_n = g\chi_{E_n}$ y función dominante $F = |g|$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ medible y $f \in L^1(\mu)$. Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) d\mu$. Demostrar que $F(x)$ es continua.

Sugerencia: Usar teoremas de convergencia.

Demostrar que dados $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ números reales, se tiene

$$\sum_k |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \leq \int_{\mathbb{R}} |f| d\mu.$$

SOL: La continuidad se deduce del TCD de la forma siguiente: fijamos x y elegimos $\{z_n\}_n$ una sucesión convergente a x , supongamos además que $z_n < x, \forall n$. Definimos $f_n(y) = f(y)\chi_{(z_n, x)}(y)$ (es decir, $f_n(y) = f(y)$ si $z_n < y < x$ y $f_n(y) = 0$ en el resto. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |F(z_n) - F(x)| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{z_n}^x |f| d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\mu = 0,$$

porque $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y) = 0, \forall y$ y las f_n están dominadas por la función integrable $|f|$.

16. Sea $\mu(X) < \infty$. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^1(\mu)$, con $f_n \rightarrow f$ uniformemente. Demostrar que $f \in L^1(\mu)$ y que $\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu$.

Sugerencia: Estudiar la sucesión $\varepsilon_n = f_n - f$, escribir $f = f_n - (f_n - f)$.

17. Sea $A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, entonces $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$. Definimos $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mediante: $f_n(x) = 1$ si $x \in \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ y $f_n(x) = 0$ en los demás casos. Probar que f_n es integrable Riemann, hallar $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ y estudiar si f es integrable Riemann.

SOL: f es la función de Dirichlet, luego no es integrable Riemann.

18. Demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{dx}{(1 + \frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}} = 1$.

Sugerencia: Usar que para $n > 1$ se tiene que $(1 + \frac{x}{n})^n \geq \frac{x^2}{4}$.

SOL: Definimos $f_n(x) = \frac{1}{(1 + \frac{x}{n})^n x^{\frac{1}{n}}}$. Se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = e^{-x}, \forall x > 0$. Sea por otro lado

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^{1/2}} & \text{si } x < 1 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Entonces, F es integrable y $f_n(x) \leq F(x)$, si $n \geq 2$. Por el TCD, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$.

19. Sea $f_n(x) = \frac{nx - 1}{(x \log n + 1)(1 + nx^2 \log n)}$, $x \in (0, 1]$. Comprobar que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ y sin embargo $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = \frac{1}{2}$.

Sugerencia: $f_n(x) = -\frac{1}{x \log n + 1} + \frac{nx}{(n \log n)x^2 + 1}$.

SOL: Con la sugerencia, podemos encontrar una primitiva de forma directa que nos da

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log[(n \log n)x^2 + 1]}{2 \log n} - \frac{\log(x \log n + 1)}{\log n} \right) \Big|_0^1 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log[(n \log n) + 1]}{2 \log n} - \frac{\log(\log n + 1)}{\log n} \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esto no contradice el TCD porque no existe función “dominante” que permita usarlo.

20. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx$, estudiando los casos $a < 0$, $a = 0$, $a > 0$. ¿Qué teoremas de convergencia son aplicables?

SOL: Sea $f_n(x) = \frac{n}{1 + n^2 x^2}$. Se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \forall x > 0$. Definimos $F(x) = \frac{1}{x^2}$.

Entonces, F es integrable en (a, ∞) si $a > 0$ y $f_n(x) \leq F(x), \forall n$. Por el TCD, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n dx = 0$ si $a > 0$.

Sin embargo, dado cualquier $\epsilon > 0$ el cambio de variable $y = nx$ nos da

$$\int_0^\epsilon \frac{n}{1 + n^2 x^2} dx = \int_0^{n\epsilon} \frac{1}{1 + y^2} dy = \arctan(n\epsilon) \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

Por simetría, lo mismo ocurre en $(-\epsilon, 0)$. Por tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n dx = \frac{\pi}{2}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^\infty f_n dx = \pi$, si $a < 0$.

21. Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n} dx$.

SOL: Sea $f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{(1 + x^2)^n}$. Se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0, \forall x > 0$. Definimos

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ \frac{4}{x^2} & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Entonces, F es integrable y $f_n(x) \leq F(x)$, si $n \geq 2$ (porque, por el desarrollo del binomio de Newton, $(1+x^2)^n \geq 1 + nx^2 + \frac{n(n-1)}{2}x^4$). Por el TCD, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n dx = 0$.

22. En cada uno de los siguientes casos, demostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dm = 0$, siendo m la medida de Lebesgue:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f_n(x) = \frac{nx \log x}{1+n^2x^2}; & \text{b) } f_n(x) = \frac{n\sqrt{x}}{1+n^2x^2}; \\ \text{c) } f_n(x) = \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}; & \text{d) } f_n(x) = \frac{n^p x^r \log x}{1+n^2x^2}, \quad r > 0, p < \min(2, 1+r). \end{array}$$

SOL: a) TCD, usando que $\frac{nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2}$, para $x, n \in \mathbb{R}$;

d) Supongamos que $p < 2$. Para aplicar TCD, ponemos $y = n$ y le damos todos los valores reales en $(0, \infty)$. Aplicando el Cálculo, vemos que

$$\sup_{y>0} \frac{y^p}{1+y^2x^2} \leq C(p)x^{-p}$$

(se alcanza en $y = \sqrt{\frac{p}{2+p}}x^{-1}$). Luego $f_n(x) \leq g(x) := C(p)x^{-p+r} \log(x)$, y esta función mayorante es integrable si $p < \min(2, 1+r)$. Los apartados b) y c) se hacen de la misma forma.

23. Demostrar que $\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x} \right)^2 dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{3}$.

SOL: Utilizando la versión de TCM para series, obtenemos que

$$\int_0^1 \left(\frac{\log x}{1-x} \right)^2 dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (\log x)^2 (n+1)x^n dx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+1)^3}.$$

La última igualdad se obtiene integrando por partes dos veces.