Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2021-22)

Hoja nº 3 SOLUCIONES

1. Sea $\mathcal{A}$ la σ álgebra formada por $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0], \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1], \\ 2 & \text{si } x \in (1, \infty). \end{cases}$$
¿Es f medible? **SOL**: NO, $f^{-1}\{1\} = (0, 1] \notin \mathcal{A}$. ¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$? **SOL**: Constantes en $(-\infty, 0]$ y en $(0, \infty)$.

2. Sea $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ una función medible no-negativa, μ una medida σ -finita en $\mathcal{A}$. Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita.

   Sugerencia: Construir $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_n \subset \ldots$, donde $\mu(\mathcal{B}_n\} < \infty$, tomar $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}n}$, siendo s_n una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite f.

3. Probar que si $f : X \to \mathbb{R}$ verifica que $\{x \in X : f(x) > r\}$ es medible para todo $r \in \mathbf{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si en la hipótesis figura cualquier subconjunto denso de $\mathbb{R}$, en lugar de $\mathbf{Q}$.)

   SOL: Basta ver que $\forall x \in \mathbb{R}$ se tiene $f^{-1}((a, \infty]) = \bigcup_{\{r \in \mathbb{Q} :\, r > a\}} f^{-1}((r, \infty])$ (unión numerable de medibles)

4. Dadas funciones medibles $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, demostrar que $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f + g$ y fg son medibles.

   SOL: Para la función $f+g$, aplicar la indicación de los apuntes de F. Soria. Para la función $f \cdot g$, considerar por separado los subconjuntos de X donde las funciones f, g tienen un determinado signo.

5. Para funciones $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   a) $|\, f \,|$ medible $\Rightarrow f$ medible. **SOL**: NO, si D es un conjunto no medible entonces $F = \chi_D - \chi_{D^c}$ no es medible pero $|F| = 1$ sí lo es.
   b) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible. **SOL**: NO; basta tomar f_1 no medible y $f_2 = -f_1$.
   c) $f_1.f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible **SOL**: NO; tomamos $f_1 = f_2 = F$, con F como en a)
   d) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible **SOL**: NO
   e) $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible **SOL**: NO

6. Sea $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, funciones medibles.

   (a) Demostrar que $\inf_n f_n$ y $\sup_n f_n$ son funciones medibles.

   Indicación. $\{\sup_n f_n > a\} = \cup_n \{f_n > a\}$.

   (b) Deducir que $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ son medibles.

   (c) Demostrar que el conjunto $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$, y que $\lim f_n$ es medible. **SOL**: visto en clase. Sabemos que tanto $g(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ como $h(x) = \liminf_{n\to\infty} f_n(x)$ son medibles. Ahora, es fácil ver que A es el conjunto donde $g(x) = h(x)$, es decir, $A = (g - h)^{-1}(0)$ y por tanto es medible.

   (d) Demostrar que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la composición $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.

7. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean X_1 y X_2 dos **variables aleatorias** sobre él, esto es, dos funciones medibles de $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}$, y F_{X_1} y F_{X_2} las **funciones de distribución** de las medidas de probabilidad inducidas por X_1 y X_2 respectivamente, definidas por

$$F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \leq x\}, \quad j = 1, 2.$$

Demostrar que si $P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = 1$, entonces $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

SOL: Para cada $x \in \mathbb{R}$ fijo, los conjuntos $A_j = \{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \leq x\}, j = 1, 2$ cumplen $P(A_1 \setminus A_2) = 0$ y $P(A_2 \setminus A_1) = 0$.

8. Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$, siendo $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Definimos $X : \mathbf{N} \to \{0, 1, \ldots k-1\}$ mediante $X(n) =$ resto de n (modulo k), ($k \in \mathbf{N}$, fijo). Sea P^* la probabilidad inducida por X (ver ejercicio 16, Hoja 2). Calcular $P^*(r)$, $0 \leq r \leq k-1$.

SOL: Se tiene, por definición,

$$P^*(r) = P(X^{-1}\{r\}) = P(\{r + nk : n = 0, 1, 2, \ldots\}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{r+nk}} = \frac{2^{-r}}{1 - 2^{-k}}, \quad \text{si } r \neq 0$$

$$P^*(0) = P(X^{-1}\{0\}) = P(\{nk : n = 1, 2, \ldots\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nk}} = \frac{2^{-k}}{1 - 2^{-k}}$$

9. Se considera el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$, donde $P(A) = \int_A f(x)\,dx$ viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Sea $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$X(x) = \begin{cases} -2 \log x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar F_X, la función de distribución de la probabilidad inducida por X.

SOL: Se tiene, por definición,

$$F_X(y) = P(\{x \in \mathbb{R} : X(x) \leq y\}) = P(\{x \in [0, 1] : -2 \log x \leq y\}) = P(\{x \in [0, 1] : x \geq e^{-y/2}\}).$$

Ahora bien, se tiene

$$\{x \in [0, 1] : x \geq e^{-y/2}\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{si} \quad y < 0 \\ [e^{-y/2}, 1], & \text{si} \quad y \geq 0. \end{cases}$$

Por tanto,

$$F_X(y) = P(\{x \in [0, 1] : x \geq e^{-y/2}\}) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad y < 0 \\ \displaystyle\int_{e^{-y/2}}^{1} 1\,dx = 1 - e^{-y/2}, & \text{si} \quad y \geq 0. \end{cases}$$