Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2020-21)
Hoja nº 2 (Medidas, conjuntos medibles)

1) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

es una σ-álgebra en X.

Solución. Es trivial comprobar que $X \in \mathcal{A}$ y que para todo $A \in \mathcal{A}$ se tiene que $A^c \in \mathcal{A}$. En cuanto a las uniones numerables, puesto que $\mathcal{A}$ es un conjunto finito, basta con considerar uniones finitas, y estas quedan reducidas a considerar la unión de dos elementos, caso que se comprueba fácilmente.

2) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Construir la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}_1 = \{\{a\}\}$ y por $\mathcal{E}_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$.

Solución. La σ-álgebra generada por $\mathcal{E}_1$ tiene que contener a $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, y es fácil ver que este conjunto es una σ-álgebra, y por tanto es la σ - álgebra generada por $\mathcal{E}_1$. En cuanto a $\mathcal{E}_2$, es fácil ver que cualquier σ -álgebra que contenga a este conjunto tiene que contener a $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$, y ya se vio en el problema anterior que esta familia es una σ-álgebra, y por tanto es la σ-álgebra generada por $\mathcal{E}_2$.

3) Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ - álgebra en X. Probar que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una σ - álgebra en Y.

Solución. Como paso previo para este problema y el siguiente observamos que:
(i) $g^{-1}(E^c) = \{x \in X : g(x) \in E^c\} = \{x \in X : g(x) \notin E\} = \{x \in X : g(x) \in E\}^c = \big(g^{-1}(E)\big)^c$.
(ii) $g^{-1}(\cup_k E_k) = \{x \in X : g(x) \in \cup_k E_k\} = \cup_k\{x \in X : g(x) \in E_k\} = \cup_k g^{-1}(E_k)$.

Pasamos ahora a demostrar el resultado pedido.

Por un lado, puesto que $g^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$ (por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra), tenemos que $Y \in \mathcal{B}$.

Por otro lado, si $E \in \mathcal{B}$, entonces $g^{-1}(E) \in \mathcal{A}$. Por consiguiente, por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra, $(g^{-1}(E))^c \in \mathcal{A}$. Usando ahora (i), $g^{-1}(E^c) \in \mathcal{A}$, y por tanto $E^c \in \mathcal{B}$.

Finalmente, sea $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia numerable de elementos de $\mathcal{B}$. Se tiene que $g^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$. Por consiguiente, por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra, $\cup_{i=1}^{\infty} g^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$, de donde, usando (ii), $g^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) \in \mathcal{A}$, lo que implica que $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$.

4) Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en Y. Probar que $\mathcal{B} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en X.

Solución. Puesto que $Y \in \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra, se tiene que $X = g^{-1}(Y) \in \mathcal{B}$.

Por otro lado, si $B \in \mathcal{B}$, entonces existe $E \in \mathcal{A}$ tal que $B = g^{-1}(E)$. Pero $E^c \in \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra. Por consiguiente, puesto que $B^c = (g^{-1}(E))^c = g^{-1}(E^c)$, concluimos que $B^c \in \mathcal{B}$.

Finalmente, sea $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una familia numerable de elementos de $\mathcal{B}$. Se tiene que existen $E_i \in \mathcal{A}$ tales que $B_i = g^{-1}(E_i)$. Pero $\cup_i E_i \in \mathcal{A}$, por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra. Por consiguiente, puesto que $\cup_i B_i = \cup_i g^{-1}(E_i) = g^{-1}(\cup_i E_i)$, concluimos que $\cup_i B_i \in \mathcal{B}$.

---

5) Determinar la σ álgebra engendrada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X no-numerable.

Solución. Obviamente $\mathcal{A}$ tiene que contener a todos los subconjuntos numerables de X y a sus complementarios. Así que nuestro candidato es $\mathcal{A} = \{A \subset X : A \text{ numerable o } A^c \text{ numerable }\}$. Aquí estamos interpretando que un conjunto es numerable si tiene la misma cardinalidad que algún subconjunto de los números naturales, de forma que estamos incluyendo los conjuntos finitos y el vacío. Veamos que este conjunto $\mathcal{A}$ es efectivamente σ-álgebra.

Obviamente $X \in \mathcal{A}$, puesto que $X^c = \emptyset$ es numerable.

Supongamos ahora que $A \in \mathcal{A}$. Si A es numerable, entonces $A^c \in \mathcal{A}$, puesto que $(A^c)^c = A$ es numerable. Si A no es numerable, entonces A^c es numerable, puesto que $A \in \mathcal{A}$, y de nuevo se tiene que $A^c \in \mathcal{A}$.

Supongamos finalmente que tenemos una familia numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{A}$. Si todos los elementos de la familia son numerables, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ es numerable y por tanto pertenece a $\mathcal{A}$. Si algún elemento de la familia, A_j, es no numerables, entonces A_j^c es numerable. Puesto que $(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} A_i^c \subset A_j^c$, se tiene entonces que $(\cup_{i=1}^{\infty} A_i)^c$ es numerable, y por tanto $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

---

6) Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una **álgebra** si cumple: i) $X \in \mathcal{A}$; ii) la unión **finita** de elementos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$, y iii) $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Probar que una álgebra $\mathcal{A}$ en X es una σ - álgebra si y solo si es cerrada para las uniones numerables crecientes, (es decir si $E_i \in \mathcal{A}$, $E_1 \subset E_2 \subset, \dots,$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$).

Solución. Las condiciones i) y iii) son idénticas para álgebras y σ-álgebras, así que basta con estudiar la condición ii).

$\Rightarrow$) Esta implicación es trivial, puesto que si la familia es cerrada para uniones numerables, lo es en particular para uniones numerables de conjuntos crecientes.

$\Leftarrow$) Dada una familia numerable $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ de elementos del álgebra, consideramos los conjuntos $B_n = \cup_{j=1}^{n} A_j$, que pertenecen al álgebra. Se tiene que B_n crece y que $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{j=1}^{\infty} A_j$. Por hipótesis, $\cup_{n=1}^{\infty} B_n$ pertenece al álgebra, y por tanto lo mismo es cierto para $\cup_{j=1}^{\infty} A_j$, y concluimos que el álgebra es σ-álgebra.

---

7) Probar que la unión de una sucesión creciente de álgebras $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ es una álgebra. Pero dar ejemplos de que:

- la unión de dos álgebras puede no ser una álgebra, y
- la unión de la sucesión $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ de σ-álgebras puede no ser una σ-álgebra.

Solución. Puesto que $X \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, es obvio que $X \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

Por otra parte, si $A \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$, se tiene que $A \in \mathcal{A}_j$ para algún $j \in \mathbb{N}$. Por lo tanto, por ser $\mathcal{A}_j$ un álgebra, se tiene que $A^c \in \mathcal{A}_j$, y en consecuencia que $A^c \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

Sea ahora $\{A_i\}_{i=1}^{M}$ un conjunto finito de elementos de $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$. Cada A_i pertenece a algún $\mathcal{A}_j$, y por tanto a todos los que tengan índice $n \geq j$. Sea

$$K = \text{mín}\{k \in \mathbb{N} : A_i \in \mathcal{A}_k \text{ para todo } i \in \{1, \ldots, M\}\}.$$

Por ser $\mathcal{A}_K$ un álgebra, se tiene que $\cup_{i=1}^{M} A_i \in \mathcal{A}_K$, y por tanto que $\cup_{i=1}^{M} A_i \in \cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{A}_n$.

Para el primer contraejemplo consideramos $X = \{a, b, c\}$. Es fácil comprobar que $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ y $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a, c\}\}$ son álgebras (también σ-álgebras), pero que sin embargo $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ no lo es.

Para construir el segundo contraejemplo empezamos demostrando un resultado auxiliar. Consideramos un conjunto X y, fijado $A \subset X$, definimos la clase

$$H_A = \{B \subset X : B \subset A \text{ o } B^c \subset A\}.$$

Veamos que H_A es una es una σ-álgebra sobre X.

Por un lado, puesto que $X^c = \emptyset \subset A$, se tiene que $X \in H_A$.

Por otra parte, si $B \in H_A$, hay dos posibilidades. Si $B \subset A$, entonces $(B^c)^c \subset A$ y también $B^c \in H_A$. Si lo que se tiene es qu $B^c \subset A$, entonces automáticamente tenemos que $B^c \in H_A$.

Finalmente, sea $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ una colección numerable de elementos de H_A. Si $B_i \subset A$ para todo $i \in \mathbb{N}$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \subset A$ y por consiguiente $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in H_A$. Si $B_j^c \subset A$ para algún j, entonces

$$(\cup_{i=1}^{\infty} B_i)^c = \cap_{i=1}^{\infty} B_i^c \subset B_j^c \subset A,$$

y concluimos también en este caso que $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in H_A$.

Pasamos ahora al contraejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$, $A_n = [-n, n]$ y $H_n = H_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$. Como acabamos de ver, los conjuntos H_n son σ-álgebras, y la sucesión $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$ es obviamente crecientes. Veamos que sin embargo $\cup_{n=1}^{\infty} H_n$ no es una σ-álgebra. Para ello consideramos la familia numerable $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$. Puesto que $A_i \in H_i$, se tiene que $A_i \in \cup_{n=1}^{\infty} H_n$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Sin embargo, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{R} \notin \cup_{n=1}^{\infty} H_n$, y por tanto $\cup_{n=1}^{\infty} H_n$ no es una σ-álgebra.

---

8) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{A}$, comprobar que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

Solución. Puesto que $\mu(E) = \mu(E \setminus F) + \mu(E \cap F)$ y $\mu(F) = \mu(F \setminus E) + \mu(E \cap F)$, se tiene que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus E) + \mu(E \cap F) + \mu(E \cap F).$$

Pero $\mu(E \cup F) = \mu(E \setminus F) + \mu(F \setminus E) + \mu(E \cap F)$, que combinado con lo anterior produce el resultado.

---

9) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $E \in \mathcal{A}$ fijo, definimos $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_E es una medida sobre $\mathcal{A}$.

Solución. Nótese que, por ser $\mathcal{A}$ σ-álgebra, y $E \in \mathcal{A}$, entonces $E \cap A \in \mathcal{A}$ para todo $A \in \mathcal{A}$. Por consiguiente la función μ_E está bien definida en $\mathcal{A}$ y su rango está contenido en $[0, \infty]$, puesto que μ es una medida.

Por otra parte, $\mu_E(\emptyset) = \mu(\emptyset \cap E) = \mu(\emptyset) = 0$, por ser μ una medida.

Finalmente, dada una familia $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $\mathcal{A}$ disjuntos dos a dos,

$$\mu_E(\cup_i A_i) = \mu((\cup_i A_i) \cap E)\mu(\cup_i (A_i \cap E)) = \sum_i \mu(A_i \cap E) = \sum_i \mu_E(A_i),$$

donde hemos usado que los conjuntos $A_i \cap E$ son disjuntos dos a dos y que μ es una medida.

---

10) (`Recordatorio`) Para una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\bar{\mathbb{R}}$ se definen $\limsup$ y $\liminf$ de la siguiente manera:

$$\limsup x_n := \sup A, \quad \liminf x_n := \inf A, \qquad \text{donde}$$
$$A := \{a \in \bar{\mathbb{R}} : a \texttt{ es límite de una subsucesión } (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}\}.$$

Sean $a_m := \sup_{n:n \geq m} x_n$ y $b_m := \inf_{n:n \geq m} x_n$. Demostrar que:

a) (a_m) es decreciente y (b_m) es creciente y, en particular, convergen en $\bar{\mathbb{R}}$ y sus límites son, respectivamente, $\inf\{a_m : m \geq 1\}$ y $\sup\{b_m : m \geq 1\}$.

b) $\limsup x_n = \inf\{a_m : m \geq 1\}$ y $\liminf x_n = \sup\{b_m : m \geq 1\}$, es decir,

$$\limsup x_n = \inf_m \sup_{n:n \geq m} x_n, \qquad \liminf x_n = \sup_m \inf_{n:n \geq m} x_n$$

c) La sucesión tiene límite si y solo si $\limsup x_n = \liminf x_n$ y, en ese caso, $\lim x_n = \limsup x_n = \liminf x_n$.

d) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$. ¿Cuál es la desigualdad para $\liminf$?

e) Si $\limsup x_n > b$, entonces existen infinitos n's tales que $x_n > b$. ¿Es cierto el recíproco?

Solución. a) Sea $A_m = \{x_n : n \geq m\}$. Entonces $a_m = \sup A_m$, $b_m = \inf A_m$. Pero $k < l$ implica que $A_k \supset A_l$. Por lo tanto a_m decrece y b_m crece.

b) Veamos para comenzar que $\limsup x_n \leq \inf_m \sup_{n\geq m} x_n$. Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión convergente a un valor a. Entonces $x_{n_k} \leq a_{n_k}$ y tomando límites tenemos que $a \leq \inf_m \sup_{n\geq m} x_n$, y de ahí el resultado.

Veamos ahora que $\inf_m \sup_{n\geq m} x_n \leq \limsup x_n$. Sea $a = \inf_m \sup_{n\geq m} x_n = \lim a_m$. Recordemos que la sucesión $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ es decreciente. Para cada $k \in \mathbb{N}$ existe un m_k tal que $0 \leq a_{m_k} - a < 1/(2k)$. Pero también existe un n_k tal que $0 \leq a_{m_k} - x_{n_k} < 1/(2k)$. Combinando ambas cosas tenemos que $|x_{n_k} - a| < 1/k$. Por consiguiente $x_{n_k} \to a$, de donde se concluye inmediatamente el resultado deseado.

El razonamiento con el límite inferior es similar.

c) $\Rightarrow$) Es una obviedad. Si existe el límite y vale a, entonces $A = \{a\}$ y por tanto $\limsup x_n = \sup A = a$ y $\liminf x_n = \inf A = a$.

$\Leftarrow$) Otra obviedad. Si $\sup A = \inf A = a$, entonces $A = \{a\}$ y por consiguiente $\lim x_n = a$.

d) Evidentemente, $\sup_{n\geq m}(x_n + y_n) \leq \sup_{n\geq m} x_n + \sup_{n\geq m} y_n$. Tomando límites se tiene el resultado (nótese que en una sucesión monótona decreciente el límite coincide con el ínfimo).

Para $\liminf$ se tiene, con un argumento similar, que $\liminf(x_n + y_n) \geq \liminf x_n + \liminf y_n$.

e) Supongamos que no fuera cierto que hay infinitos x_n mayores que b. Sea

$$k = \max\{n : x_n > b\}.$$

Entonces $a_j \leq b$ para todo $j > k$, y por consiguiente $\limsup x_n = \inf_j a_j \leq b$, lo que es una contradicción.

El recíproco no es cierto. Como contraejemplo basta tomar una sucesión estrictamente decreciente que converja a b. Se tiene que $x_n > b$ para todo b y sin embargo $\limsup x_n = b$.

---

11) Sea X un conjunto y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se definen los conjuntos $\underline{E} := \liminf E_n \equiv \bigcup_m \bigcap_{n\geq m} E_n$ y $\overline{E} := \limsup E_n \equiv \bigcap_m \bigcup_{n\geq m} E_j$.

a) Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset \underline{E} \subset \overline{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

b) Hallar $\underline{E}$ y $\overline{E}$ cuando $\{E_n\}$ es una sucesión creciente, cuando $\{E_n\}$ es una sucesión decreciente, y cuando los $\{E_n\}$ son disjuntos dos a dos.

c) Encontrar un ejemplo en $X = \mathbb{R}$ donde E_n sean intervalos tales que $\underline{E} \neq \overline{E}$.

d) Comprobar que $\limsup E_n$ es el conjunto de puntos que pertenece a E_n para infinitos n's.

Solución. a) De las definiciones se sigue inmediatamente que $\underline{E} \supset \cap_{n=1}^{\infty} E_n$ y que $\overline{E} \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Sea ahora $x \in \underline{E}$. Se tiene que $x \in \cap_{j=k}^{\infty} E_j$ para algun k, y por tanto $x \in E_j$ para todo $j \geq k$. En particular, $x \in \cup_{j\geq n}^{\infty} E_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por consiguiente $x \in \overline{E} = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{j\geq n}^{\infty} E_j$.

b) Supongamos que la sucesión E_n es creciente. Entonces $\cap_{j=n}^{\infty} E_j = E_n$, y concluimos que $\underline{E} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, que combinado con a) da que $\overline{E} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Si la sucesión E_n es decreciente, entonces $\cup_{j=n}^{\infty} E_j = E_n$, y concluimos que $\overline{E} = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$, que combinado con a) da que $\underline{E} = \cap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Si los E_n son disjuntos dos a dos, se ve inmediatamente que $\underline{E} = \emptyset = \overline{E}$.

c) Tomamos $E_n = (-1, 0]$ si n es impar y $E_n = [0, 1)$ si n es par. Entonces

$$\underline{E} = \cup_{n=1}^{\infty} \{0\} = \{0\}, \qquad \overline{E} = \cap_{n=1}^{\infty} (-1, 1) = (-1, 1).$$

d) Si $x \in E_k$ para infinitos k, entonces $x \in \cup_{j=n}^{\infty} E_j$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y por tanto $x \in \overline{E}$. Recíprocamente, supongamos que $x \in E_j$ solo para un número finito de valores de j. Sea k el máximo de dichos valores de j. Entonces $x \notin \cup_{j=k+1}^{\infty} E_j$, y por tanto $x \notin \overline{E}$.

---

12) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se definen las operaciones de conjuntos $\liminf E_j := \bigcup_n \bigcap_{j \geq n} E_j$; $\limsup E_j := \bigcap_n \bigcup_{j \geq n} E_j$. Sean $E_j \in \mathcal{M}$, $j \geq 1$. Probar que si $\mu(\cup E_j) < \infty$:

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j), \qquad \mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

En particular si $\mu(X) < \infty$ entonces:

a) $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$

b) Si existe $\lim E_j$, entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$

Solución. Sean $A_n = \cap_{j \geq n} E_n$, $B_n = \cup_{j \geq n} E_j$. Nótese que $A_n \subset B_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto que $\mu(A_n) \leq \mu(B_n)$. Las dos sucesiones de conjuntos que acabamos de construir son monótonas, una creciente, $A_n \subset A_{n+1}$, y la otra decreciente, $B_n \supset B_{n+1}$. Por consiguiente, puesto que por hipótesis $\mu(B_1) < \infty$, usando los teoremas de monotonía de conjuntos se tiene que

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} E_j) = \mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} (B_n), \qquad \mu(\liminf_{n\to\infty} E_j) = \mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} (A_n).$$

Puesto que, como hemos visto, $\mu(A_n) \leq \mu(B_n)$, se tiene que $\lim_{n\to\infty}(A_n) \leq \lim_{n\to\infty}(B_n)$, que combinado con las igualdades anteriores produce inmediatamente el resultado. De aquí se deducen automáticamente a), puesto que si $\mu(X) < \infty$ se tiene automáticamente que $\mu(B_1) < \infty$. Y de a) se deduce inmediatamente b), recordando que $\lim E_j$ existe si los límites inferior y superior coinciden.

---

13) Sea X un conjunto infinito numerable. Consideremos la σ - álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

a) Probar que μ es finitamente aditiva, pero no numerablemente aditiva.

b) Probar que $X = \lim_{n\to\infty} A_n$, para cierta sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$, tales que $\mu(A_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

Solución. a) Sea $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ una familia finita de subconjuntos disjuntos de X. Si todos ellos son finitos, su unión tiene un número finito de elementos. Por tanto, $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$. Si alguno de ellos tiene infinitos elementos, lo mismo es cierto para su unión, y se tiene que $\mu(\cup_{i=1}^n A_i) = \infty = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$. Concluimos que μ es aditiva.

Es fácil ver que sin embargo no es numerablemente aditiva. Para ello, si $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, tomamos $A_i = \{x_i\}$ y se tiene que $\mu(\cup_{i=1}^\infty) = \mu(X) = \infty \neq 0 = \sum_{i=1}^\infty \mu(A_i)$.

b) Sea $X = \{x_1, x_2, \dots\}$, entonces $X = \lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^\infty A_n$ para la sucesión creciente de conjuntos $A_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Nótese que $\mu(A_n) = 0$, pero $\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \mu(\cup_n A_n) = \mu(X) = \infty$.

---

14) Sea $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sea μ una medida que verifica $\mu(a_1) = \mu(a_2) = \mu(a_3) = \frac{1}{3}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$A_n = \{a_1, a_2\} \quad \text{si } n \text{ es par,} \qquad A_n = \{a_3\} \quad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Probar que $\mu(\liminf A_n) < \liminf \mu(A_n) < \limsup \mu(A_n) < \mu(\limsup A_n)$.

Solución. Se tiene $\liminf A_n = \emptyset$ y $\limsup A_n = X$. Además $\mu(A_n) = 1/3$, si n es impar, y $\mu(A_n) = 2/3$, si n es par. Por tanto,

$$\mu(\liminf A_n) = \mu(\emptyset) = 0 < \liminf \mu(A_n) = 1/3 < \limsup \mu(A_n) = 2/3 < \mu(\limsup A_n) = \mu(X) = 1.$$

---

15) Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles tales que $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$. Demostrar que cada elemento x pertenece a un número finito de A_n para c.t.x. (Dicho de otra manera el conjunto de los puntos x que pertenecen a infinitos de los A_n, es decir, $\limsup A_n$, mide cero.)

Solución. Recordemos que $\limsup A_n := \cap_k B_k$, donde $B_k = \cup_{j\geq k} A_j$. Obviamente, $B_k \supset B_{k+1}$. Como además $\mu(B_1) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$, podemos usar el TCM para sucesiones de conjuntos decrecientes y obtenemos

$$\mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\cup_{j\geq k} A_j\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{j=k}^\infty \mu(A_j) = 0.$$

---

16) Sea $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida completo, es decir, tal que todos los subconjuntos de un conjunto medible de **medida cero** también son medibles. Sea $g : X_1 \to X_2$ una aplicación, $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$ y $\mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Comprobar que $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ es un espacio de medida completo. **NOTA: μ_2 se le denomina medida inducida en X_2 por la aplicación g.**

Solución. Observamos para empezar que el ejercicio 3 de esta misma hoja nos garantiza que $\mathcal{A}_2$ es σ-álgebra.

A continuación demostramos que μ_2 es una medida sobre $\mathcal{A}_2$. En efecto, por un lado tenemos que $\mu_2(\emptyset) = \mu_1(g^{-1}(\emptyset)) = \mu_1(\emptyset) = 0$. Por otro, si $\{B_i\}_{i=1}^\infty$ es una familia numerable de elementos de $\mathcal{A}_2$, entonces, puesto que los conjuntos de la familia $\{g^{-1}(B_i)\}_{i=1}^{\infty}$ son disjuntos dos a dos y μ_1 es una medida,

$$\mu_2(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \mu_1(g^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i)) = \mu_1(\cup_{i=1}^{\infty} g^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(g^{-1}(B_i)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_2(B_i).$$

Comprobemos finalmente que se trata de una medida completa. Supongamos que $A \in \mathcal{A}_2$ cumple $\mu_2(A) = 0$ y sea $B \subset A$. Queremos probar que $B \in \mathcal{A}_2$. Como $\mu_1(g^{-1}(A)) = \mu_2(A) = 0$, $g^{-1}(B) \subset g^{-1}(A)$ y μ_1 es completa, deducimos que $g^{-1}(B) \in \mathcal{A}_1$ y por tanto $B \in \mathcal{A}_2$.
