Teoría de la integral y de la medida, 2021-22

Hoja nº 8 *(Teorema de Radon-Nikodym)*

1.- Sea $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, ν la medida de contar en $\mathbb{N}$ y $\mu(E) = \sum_{n\in E} \frac{1}{2^n}$. Comprobar que $\nu \ll \mu$, sin embargo no se verifica la condición de que dado $\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta \Rightarrow \nu(E) < \epsilon$, $E \in \mathcal{A}$.

2.- Sea $X = [0,1]$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{[0,1]}$, m la medida de Lebesgue en $\mathcal{A}$, μ la medida de contar en $\mathcal{A}$. Probar:

a) $m \ll \mu$ pero $\mathrm{d}m \neq f\mathrm{d}\mu$ para toda f.

b) μ no tiene descomposición de Lebesgue respecto de m.

3.- Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $\mathcal{B}$ una σ-subálgebra de $\mathcal{A}$ y sea ν la restricción de μ a $\mathcal{B}$. Supongamos que ν es σ-finita. Si $f \in L^1(\mu)$ demostrar que existe g $\mathcal{B}$-medible, $g \in L^1(\nu)$ tal que $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\nu$ para todo $E \in \mathcal{B}$, además g es única módulo alteraciones en conjuntos ν-nulos. (A la función g se le llama en probabilidad $E(f|\mathcal{B})$, esperanza condicionada de f con respecto $\mathcal{B}$).

Indicación: Aplicar el Teorema de Radon-Nikodym a las medidas $\mu_0 = \nu$ como la medida σ-finita y $\nu_0 = f\mathrm{d}\mu$, ambas definidas solo sobre $\mathcal{B}$.

4.- Probar que si una medida λ en $\mathbb{R}$ tiene soporte en un conjunto numerable $\{x_j\}_j$, entonces existen constantes c_j tales que $\lambda(E) = \sum_j c_j\chi_E(x_j)$, es decir $\lambda = \sum_j c_j\delta_{x_j}$ (δ_a representa la delta de Dirac en el punto $x = a$).

5.- Sean ν y λ medidas (finitas) definidas sobre una misma σ-álgebra. Probar que si se tiene a la vez $\lambda \perp \nu$ y $\lambda \ll \nu$, entonces $\lambda \equiv 0$.

6.- Se dice que una función $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua si dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que dadas dos sucesiones de números $\{a_k\}_k$ y $\{b_k\}_k$, con $a_k < b_k$, $\forall k$, entonces

$$\sum_{k\geq 1} |b_k - a_k| < \delta \quad \Longrightarrow \quad \sum_{k\geq 1} |F(b_k) - F(a_k)| < \epsilon.$$

(Ver ejercicio 8 de la hoja 4). Probar que si F es absolutamente continua y, además, creciente entonces la medida de Lebesgue-Stieltjes $\mathrm{d}F$ es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue $\mathrm{d}x$ en $\mathbb{R}$.
