
Teoría de la integral y de la medida, 2021-22
Hoja nº 7 (medidas y σ -álgebras producto, medidas inducidas, el Teorema de Fubini)

1.- Sea $d\nu$ la medida definida sobre $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ por medio de

$$\nu(A) = \text{card}(A \cap \mathbb{Z}^2) \quad \text{para todo } A \subset \mathbb{R}^2.$$

Es decir, $d\nu$ es la medida que “cuenta” el número de puntos de coordenadas enteras que hay en un conjunto. Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\phi(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Si $d\nu_\phi$ es la medida inducida por $d\nu$ y ϕ en \mathbb{R} , calcular $\nu_\phi([1, e])$ y $\nu_\phi((e^2, e^3])$.

2.- Sea $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ y $dm = dx dy$ la medida de Lebesgue en X . Definimos $\Phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ por medio de $\Phi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$. Sea m_Φ la medida inducida por Φ y m en \mathbb{R} .

a) Calcular el valor de $m_\Phi([0, 1])$.

b) Demostrar que m_Φ tiene la forma $dm_\Phi(y) = W(y) dy$ y encontrar $W(y)$ explícitamente.

3.- Sean $X = Y = \mathbb{N}$, $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ y μ, ν las medidas de contar en \mathbb{N} . Probar que $d(\mu \times \nu)$ es la medida de contar en $\mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Si definimos

$$f(m, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n, \\ -1 & \text{si } m = n + 1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

comprobar que $\int |f| d(\mu \times \nu) = \infty$ y que las integrales iteradas

$$\int \left(\int f d\mu \right) d\nu, \quad \int \left(\int f d\nu \right) d\mu$$

existen y son distintas.

4.- Sean $(X, \mathcal{M}, \mu), (Y, \mathcal{N}, \nu)$ espacios de medida σ -finitos. Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{M} medible; $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{N} medible y h definida mediante $h(x, y) = f(x)g(y)$.

a) Demostrar que h es $\mathcal{M} \otimes \mathcal{N}$ medible.

b) Demostrar que si $f \in L^1(\mu)$ y $g \in L^1(\nu)$ entonces $h \in L^1 d(\mu \times \nu)$ y además

$$\int_{X \times Y} h d(\mu \times \nu) = \left(\int_X f d\mu \right) \left(\int_Y g d\nu \right).$$

Sugerencia: empezar con funciones simples.

5.- Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función \mathcal{M} -medible, $f \geq 0$, y sea $A_f = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leq y < f(x)\}$.

a) Probar que $A_f \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{B}$ (\mathcal{B} es la σ -álgebra de Borel en \mathbb{R}). *Sugerencia:* empezar con f simple.

b) Dada una medida μ en (X, \mathcal{M}) σ -finita, probar que $\int_X f d\mu$ coincide con la medida producto $\pi = d\mu \otimes dy$ del conjunto A_f .

6.- Sea $X = Y = [0, 1]$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_{[0,1]}$ (álgebra de Borel en $[0,1]$), μ la **medida de Lebesgue** en \mathcal{A}_1 , ν la **medida de contar** en \mathcal{A}_2 . En el espacio de medida $(X \times Y, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu \otimes \nu)$ se considera el conjunto $V = \{(x, y) : x = y\}$. Comprobar que $V \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ y que $(\mu \times \nu)(V) = +\infty$. Sin embargo

$$\int_Y d\nu \int_X \chi_V d\mu = 0, \quad \int_X d\mu \int_Y \chi_V d\nu = 1.$$

Esto muestra que la hipótesis de que las medidas sean σ -finitas no se puede quitar del enunciado del Teorema de Fubini.

Sugerencia: Si $V_n = (I_1^j \times I_1^j) \cup \dots \cup (I_n^j \times I_n^j)$ con $I_n^j = [\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n}]$ $j = 1, 2, \dots, 2^n$, entonces $V = \bigcap_1^\infty V_n$.

7.- Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}, dm)$, donde m es la medida de Lebesgue. Demostrar que $f(x-y)g(y)$ es integrable en y para casi todo x . Para estos valores de x , ponemos $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dm(y)$. Se dice que h es la *convolución* de f y g y se escribe $h = f * g$. Demostrar que h es integrable y que $\|h\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$. Recordamos que $\|h\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |h| dm$.

8.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Comprobar que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \frac{\pi}{4}$ y que $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = -\frac{\pi}{4}$. ¿Qué hipótesis no se verifica en el teorema de Fubini?

9.- Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{si } x = y = 0. \end{cases}$$

Demostrar que las integrales iteradas (con respecto a la medida de Lebesgue) coinciden y valen cero, sin embargo f no es integrable en $[-1, 1] \times [-1, 1]$. ¿Qué hipótesis no se verifica en el Teorema de Fubini?
