**Teoría de la integral y de la medida, 2021-22**

**Hoja n$^0$ 6** *(Medidas de Lebesgue-Stieltjes)* 24 de noviembre de 2021

---

1.- Definimos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Sea $dF$ la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a $F$. Calcular: $dF\big(\{1\}\big)$, $dF\big(\{2\}$, $dF\big((1,3]\big)$, $dF\big((1,3)\big)$, $dF\big([1,3]\big)$, $dF\big([1,3)\big)$.

---

2.- Dar un ejemplo de una función de distribución $F$ tal que

$$dF(a,b) < F(b) - F(a) < dF[a,b]$$

para algunos $a$ y $b$ siendo $dF$ la medida correspondiente a $F$.

---

3.- Sea $\mu$ la medida de contar sobre $\mathbb{R}$ y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$, definimos $\nu(B) = \mu(B \cap A)$ para todo $B \subset \mathbb{R}$.

a) Si $A = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ ¿es $\nu$ una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

b) Si $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$ ¿es $\nu$ una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

---

4.- Sea $F(x)$ la función de distribución sobre $\mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \\ 1 + x & \text{si} \quad x \in [-1, 0) \\ 2 + x^2 & \text{si} \quad x \in [0, 2) \\ 9 & \text{si} \quad x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Si $dF$ es la medida de Lebesgue Stieltjes correspondiente a $F$, hallar la medida $dF$ de los siguientes conjuntos: $\{2\}$, $[-1/2, 3)$, $(-1, 0] \cup (1, 2)$, $[0, 1/2) \cup (1, 2]$, $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

---

5.- a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no-negativa e integrable Lebesgue y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Probar que $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy$ es una función de distribución de probabilidad y ademas $F$ es continua. ($f$ se denomina **función de densidad**)

b) Si $\quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \in [0, 1], \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases} \quad$ hallar $F(x)$.

---

6.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} kx(1 - x), & \text{si} \quad x \in [0, 1] \quad k > 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Determinar el valor de $k$ para que $f$ sea la función de densidad de una medida de probabilidad. Determinar la función de distribución.

---

7.- Supongamos que la función de probabilidad que mide la duración en minutos de las conferencias telefónicas viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-kx}, & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo $k \geq 0$ una constante conocida.
a) Hallar $\alpha$ para que $f$ sea una densidad de probabilidad.
b) Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure mas de tres minutos.
c) Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.

---

8.- Dada la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad x \in [-1, \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} + \frac{x-\sqrt{2}}{10} & \text{si} \quad x \in [\sqrt{2}, 5) \\ 1 & \text{si} \quad x \in [5, \infty) \end{cases}$$

Si $dF$ es la medida de probabilidad correspondiente, calcular la medida de los conjuntos:
$\mathbb{R}$; $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [\sqrt{2}, 5]$; $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-2, \sqrt{2}]$; $\mathbb{Q} \cap [1, 6]$.

---

9.- Sea $F$ una función de distribución en $\mathbb{R}$. a) Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de $F$ es numerable. b) Probar que el conjunto de puntos de continuidad es denso en $\mathbb{R}$.

(Sugerencia: $F$ es monótona luego en sus puntos de discontinuidad hay saltos).

---

10.- Sea $dF$ la medida de Lebesgue Stieltjes sobre $\mathbb{R}$ correspondiente a una función de distribución continua $F$ no trivial.

a) Probar que si $A$ es numerable entonces $dF(A) = 0$.

b) Probar que existen conjuntos $A$ tales que $dF(A) > 0$ y $A$ no contiene ningún intervalo abierto.

c) Si $dF(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, ¿ tiene que ser $A$ denso en $\mathbb{R}$ ?

Sugerencia: Para c) construir una función $F(x)$ que sea constante en un intervalo.

---

11.- Sea $F : [0, \infty) \to [0, \infty)$ la función de distribución definida mediante $F(x) = \log(1 + x)$, sea $dF$ la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a $F$. Calcular $dF\ \{\text{Cantor}\}$ .

Sugerencia: El conjunto de Cantor está contenido en $2^n$ intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$.

---

12.- Sea $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de distribución y sea $G \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Supongamos que $F$ es localmente constante en $G$ (esto equivale a decir que $F$ es constante sobre cualquier intervalo abierto, contenido en $G$). Demostrar que $\mu_F^*(G) = 0$, donde $\mu_F$ es la medida de Lebesgue-Stiltjes asociada. Deducir que en este caso, cualquier subconjunto de $G$ es medible respecto de $\mu_F$.