Teoría de la integral y de la medida, 2021-22
Hoja n^0 5 *(Medidas exteriores)* 24 de noviembre de 2021

1.- Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ mediante $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(A) = 1$, si $A \neq \emptyset$, $A \subset X$. Comprobar que μ^* es una medida exterior. Determinar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

2.- Sea X un conjunto no vacío. Definimos $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(X) = 2$, $\mu^*(A) = 1$ para $A \neq \emptyset$, $A \neq X$. Comprobar que μ^* es una medida exterior. Determinar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

3.- Comprobar que si μ^* es una medida exterior finitamente aditiva entonces es numerablemente aditiva.

4.- Sea μ^* una medida exterior, sea H un conjunto μ^*-medible, sea μ^*_H la restricción de μ^* a $\mathcal{P}(H)$.
a) Comprobar que μ^*_H es una medida exterior en H.
b) Comprobar que $A \subset H$ es μ^*_H-medible si y solo si es μ^*-medible

---

5.- Si en el ejercicio 4) se suprime la hipótesis de que H sea μ^*-medible, ¿qué partes seguirían siendo ciertas y cuales fallarían?

6.- Sea μ^* una medida exterior, sean $\{A_j\}$ una sucesión de conjuntos μ^*-medibles disjuntos. Probar que

$$\mu^*\left(E \cap \left(\bigcup_1^\infty A_j\right)\right) = \sum_1^\infty \mu^*(E \cap A_j), \quad \forall E \subset X.$$

Esto aparece en la demostración del Teorema de Caratheodory.

7.- Variando si es necesario en cada caso el tamaño de los intervalos, construir un conjunto de tipo Cantor de medida de Lebesgue mayor que $1 - \epsilon$.

8.- Sea X un conjunto con un número infinito de elementos. Tomemos como clase recubridora $\mathcal{C}$, la formada por el vacío, el total y los conjuntos con un único elemento. Definimos $\rho(\emptyset) = 0$, $\rho(X) = \infty$, $\rho(E) = 1$, si $E \in \mathcal{C}$, $E \neq \emptyset$, X. Describir la medida exterior así obtenida. Estudiar la σ - álgebra de los conjuntos medibles.

9.- Sea X un conjunto no-numerable. Sea $\mathcal{C}$ la σ - álgebra formada por los conjuntos numerables y no-numerables de complementario numerable.
Sea $\mu : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ definida mediante $\mu(E) = \text{card } E$, si E es finito, $\mu(E) = \infty$ en otro caso.
a) Probar que μ es una medida completa en $\mathcal{C}$.
b) Estudiar la medida μ^* construida a partir de $\mathcal{C}$ y μ.

10.- Sea $X = [M, N]$ un intervalo cerrado en $\mathbb{R}$, y sea f una función continua y positiva en $[M, N]$. Consideramos la clase recubridora $\mathcal{D}$, que consiste de $\emptyset$ e intervalos cerrados contenidos en X. Definimos la función $\rho : \mathcal{D} \to [0, +\infty)$, poniendo $\rho(\emptyset) = 0$ y

$$\rho([c, d]) = (\max_{[c,d]} f) \cdot (d - c), \quad [c, d] \subset [M, N].$$

a) Calcular la correspondiente medida exterior $\rho^*([c,d])$ para todo subintervalo $[c,d] \subseteq [M,N]$.

b) Demostrar que un subconjunto A de $[M,N]$ es ρ^*-medible si y solo si es Lebesgue medible.

c) Sean g, h dos funciones continuas positivas sobre M,N, y vamos a definir ρ por la fórmula

$$\rho([c,d]) = \begin{cases} (\text{máx}_{[c,d]}\, g) \cdot (d-c), & \text{si } c, d \text{ son irracionales,} \\ (\text{máx}_{[c,d]}\, h) \cdot (d-c), & \text{si } c \text{ ó } d \text{ es racional.} \end{cases}$$

¿Cómo será la medida exterior ρ^* en este caso?

11.- Sea $X = [0,1]$, consideramos la colección $\mathcal{D}$, que consiste de $\emptyset$ e intervalos cerrados contenidos en X. Elegimos un parámetro $\alpha > 0$ y definimos la función $\rho : \mathcal{D} \to [0, +\infty)$,

$$\rho(\emptyset) = 0,\ \rho([a,b]) = (b-a)^\alpha, \quad [a,b] \subset [0,1],$$

Sea ρ^* la correspondiente medida exterior. Para $\alpha = 1$, es la medida exterior de Lebesgue.

a) Calcular $\rho^*([a,b])$ si $\alpha > 1$. Demostrar que en este caso, todo subconjunto de $[0,1]$ es ρ^*-medible.

b) Supongamos ahora que $0 < \alpha < 1$. Demostrar que entonces $\rho^*([a,b]) = \rho([a,b])$. Comprobar que en este caso, un intervalo $[a,b] \neq [0,1]$ nunca es ρ^*-medible. ¿Existen conjuntos ρ^*-medibles, distintos de $\emptyset$ y $[0,1]$? ¿Existe un conjunto $A \subset [0,1]$ ρ^*-medible, tal que tanto A como A^c no son numerables?

c)* Demostrar que en el caso cuando $\alpha \in (0,1)$, un subconjunto $A \subset [0,1]$ es ρ^*-medible si y solo si $\rho^*(A) = 0$ o $\rho^*(A^c) = 0$.