

1. Sea \mathcal{A} la σ álgebra formada por $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0], \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1], \\ 2 & \text{si } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

¿Es f medible? ¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$?

2. Sea $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible no-negativa, μ una medida σ -finita en \mathcal{A} . Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita.

Sugerencia: Construir $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \dots \subset \mathcal{B}_n \subset \dots$, donde $\mu(\mathcal{B}_n) < \infty$, tomar $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}_n}$, siendo s_n una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite f .

3. Probar que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ verifica que $\{x \in X : f(x) > r\}$ es medible para todo $r \in \mathbf{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si en la hipótesis figura cualquier subconjunto denso de \mathbb{R} , en lugar de \mathbf{Q} .)

4. Dadas funciones medibles $f, g : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$, demostrar que $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f + g$ y fg son medibles.

5. Para funciones $f : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?

- a) $|f|$ medible $\Rightarrow f$ medible.
- b) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible.
- c) $f_1 \cdot f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible
- d) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible
- e) $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible

6. Sea $f_n : (X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, funciones medibles.

- (a) Demostrar que $\inf_n f_n$ y $\sup_n f_n$ son funciones medibles.

Indicación. $\{\sup_n f_n > a\} = \cup_n \{f_n > a\}$.

- (b) Deducir que $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ son medibles.

- (c) Demostrar que el conjunto $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\}$ es un elemento de \mathcal{A} , y que $\lim f_n$ es medible.

- (d) Demostrar que si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{A} -medible y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la composición $g \circ f$ es \mathcal{A} -medible.

7. Sea (Ω, \mathcal{A}, P) un espacio de probabilidad. Sean X_1 y X_2 dos **variables aleatorias** sobre él, esto es, dos funciones medibles de $(\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}$, y F_{X_1} y F_{X_2} las **funciones de distribución** de las medidas de probabilidad inducidas por X_1 y X_2 respectivamente, definidas por

$$F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \leq x\}, \quad j = 1, 2.$$

Demostrar que si $P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = 1$, entonces $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

8. Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$, siendo $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$. Definimos $X : \mathbf{N} \rightarrow \{0, 1, \dots, k-1\}$ mediante $X(n) = \text{resto de } n \text{ (modulo } k)$, ($k \in \mathbf{N}$, fijo). Sea P^* la probabilidad inducida por X (ver ejercicio 16, Hoja 2). Calcular $P^*(r)$, $0 \leq r \leq k-1$.

9. Se considera el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$, donde $P(A) = \int_A f(x) dx$ viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Sea $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \rightarrow \mathbb{R}$ definida mediante

$$X(x) = \begin{cases} -2 \log x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar F_X , la función de distribución de la probabilidad inducida por X .