Teoría de la integral y de la medida (curso 2021-22)
Hoja n$^{\underline{0}}$ 2 *(Medidas, conjuntos medibles)*

1) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Comprobar que la familia de conjuntos

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}$$

es una σ - álgebra en X.

2) Sea $X = \{a, b, c, d\}$. Construir la σ - álgebra generada por

$$\mathcal{E} = \{\{a\}\} \text{ y por } \mathcal{E} = \{\{a\}, \{b\}\}.$$

3) Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ - álgebra en X. Probar que $\mathcal{B} = \{E \subset Y : g^{-1}(E) \in \mathcal{A}\}$ es una σ - álgebra en Y.

4) Sea $g : X \to Y$. Sea $\mathcal{A}$ una σ - álgebra en Y. Probar que $\mathcal{B} = \{g^{-1}(E) : E \in \mathcal{A}\}$ es una σ-álgebra en X.

5) Determinar la σ álgebra engendrada por la colección de los subconjuntos finitos de un conjunto X no-numerable.

6) Se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es una **álgebra** si cumple: i) $X \in \mathcal{A}$; ii) la unión **finita** de elementos de $\mathcal{A}$ está en $\mathcal{A}$, y iii) $\mathcal{A}$ es cerrada por complementos. Probar que una álgebra $\mathcal{A}$ en X es una σ - álgebra si y solo si es cerrada para las uniones numerables crecientes, (es decir si $E_i \in \mathcal{A}$, $E_1 \subset E_2 \subset, \ldots$, entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{A}$).

7) Probar que la unión de una sucesión creciente de álgebras $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ es una álgebra. Pero dar ejemplos de que:

- la unión de dos álgebras puede no ser una álgebra, y
- la unión de la sucesión $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset ...$ de σ-álgebras puede no ser una σ-álgebra.

8) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Si $E, F \in \mathcal{A}$, comprobar que

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

9) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Para $E \in \mathcal{A}$ fijo, definimos $\mu_E(A) = \mu(A \cap E)$. Probar que μ_E es una medida sobre $\mathcal{A}$.

10) (`Recordatorio`) Para una sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ en $\bar{\mathbb{R}}$ se definen lím sup y lím inf de la siguiente manera:

$$\limsup x_n := \sup A, \quad \liminf x_n := \inf A, \qquad \text{donde}$$
$$A := \{a \in \bar{\mathbb{R}} : a \texttt{ es límite de una subsucesión } (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}\}.$$

Sean $a_m := \sup_{n:n \geq m} x_n$ y $b_m := \inf_{n:n \geq m} x_n$. Demostrar que:

a) (a_m) es decreciente y (b_m) es creciente y, en particular, convergen en $\bar{\mathbb{R}}$ y sus límites son, respectivamente, $\inf\{a_m : m \geq 1\}$ y $\sup\{b_m : m \geq 1\}$.

b) $\limsup x_n = \inf\{a_m : m \geq 1\}$ y $\liminf x_n = \sup\{b_m : m \geq 1\}$, es decir,

$$\limsup x_n = \inf_m \sup_{n:n \geq m} x_n, \qquad \liminf x_n = \sup_m \inf_{n:n \geq m} x_n$$

c) La sucesión tiene límite si y solo si $\limsup x_n = \liminf x_n$ y, en ese caso, $\lim x_n = \limsup x_n = \liminf x_n$.

d) $\limsup(x_n + y_n) \leq \limsup x_n + \limsup y_n$. ¿Cuál es la desigualdad para $\liminf$?

e) Si $\limsup x_n > b$, entonces existen infinitos n's tales que $x_n > b$. ¿Es cierto el recíproco?

11) Sea X un conjunto y $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X. Se definen los conjuntos $\underline{E} := \liminf E_n \equiv \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} E_n$ y $\overline{E} := \limsup E_n \equiv \bigcap_m \bigcup_{n \geq m} E_j$.

a) Demostrar que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \subset \underline{E} \subset \overline{E} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

b) Hallar $\underline{E}$ y $\overline{E}$ cuando $\{E_n\}$ es una sucesión creciente, cuando $\{E_n\}$ es una sucesión decreciente, y cuando los $\{E_n\}$ son disjuntos dos a dos.

c) Encontrar un ejemplo en $X = \mathbb{R}$ donde E_n sean intervalos tales que $\underline{E} \neq \overline{E}$.

d) Comprobar que $\limsup E_n$ es el conjunto de puntos que pertenece a E_n para infinitos n's.

12) Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Se definen las operaciones de conjuntos $\liminf E_j := \bigcup_n \bigcap_{j \geq n} E_j$; $\limsup E_j := \bigcap_n \bigcup_{j \geq n} E_j$. Sean $E_j \in \mathcal{M}$, $j \geq 1$. Probar que si $\mu(\cup E_j) < \infty$:

$$\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j), \qquad \mu(\limsup E_j) \geq \limsup \mu(E_j).$$

En particular si $\mu(X) < \infty$ entonces:

a) $\mu(\liminf E_j) \leq \liminf \mu(E_j) \leq \limsup \mu(E_j) \leq \mu(\limsup E_j)$

b) Si existe $\lim E_j$, entonces $\mu(\lim E_j) = \lim \mu(E_j)$

13) Sea X un conjunto infinito numerable. Consideremos la σ - álgebra $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Para cada $A \in \mathcal{A}$ definimos

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ es finito,} \\ \infty & \text{si } A \text{ es infinito.} \end{cases}$$

a) Probar que μ es finitamente aditiva, pero no numerablemente aditiva.

b) Probar que $X = \lim_{n \to \infty} A_n$, para cierta sucesión creciente de conjuntos $\{A_n\}$, tales que $\mu(A_n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N}$.

14) Sea $X = \{a_1, a_2, a_3\}$, sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Sea μ una medida que verifica $\mu(a_1) = \mu(a_2) = \mu(a_3) = \frac{1}{3}$. Consideremos la sucesión de conjuntos

$$A_n = \{a_1, a_2\} \quad \text{si } n \text{ es par}, \qquad A_n = \{a_3\} \quad \text{si } n \text{ es impar}.$$

Probar que $\mu(\liminf A_n) < \liminf \mu(A_n) < \limsup \mu(A_n) < \mu(\limsup A_n)$.

15) Sean $\{A_n\}$ conjuntos medibles tales que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(A_n) < \infty$. Demostrar que cada elemento x pertenece a un número finito de A_n para c.t.x. (Dicho de otra manera el conjunto de los puntos x que pertenecen a infinitos de los A_n, es decir, $\limsup A_n$, mide cero.)

16) Sea $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ un espacio de medida completo, es decir, tal que todos los subconjuntos de un conjunto medible de **medida cero** también son medibles.. Sea $g : X_1 \to X_2$ una aplicación, $\mathcal{A}_2 = \{A \subset X_2 : g^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1\}$, $\ \mu_2(A) = \mu_1(g^{-1}(A))$. Comprobar que $(X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ es un espacio de medida completo. **NOTA: μ_2 se le denomina medida inducida en X_2 por la aplicación g.**

17) Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se dice que un subconjunto $\gamma \in \mathcal{A}$, $\gamma \neq \emptyset$, *es un átomo de* $\mathcal{A}$ si ningún conjunto δ tal que $\emptyset \neq \delta \subsetneq \gamma$ pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{A}$.

1. Comprobar que dos átomos $\gamma_1 \neq \gamma_2$ de $\mathcal{A}$ son siempre disjuntos.
2. Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene k átomos y que X es su unión. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{A}$?
3. Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad numerable de átomos y que, otra vez, X es su unión. ¿Qué cardinalidad tiene la σ-álgebra $\mathcal{A}$?