Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2021-22)
Hoja nº 1 (Introducción)

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monótona y acotada. Demostrar que f es integrable Riemann.

2. Demostrar que si las funciones $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ son integrables Riemann y forman una sucesión uniformemente convergente a cierta función f, entonces f es integrable Riemann y se tiene $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$. Dar ejemplos de cómo, si el límite NO es uniforme, *puede* que no exista la integral $\displaystyle\int_a^b f$, o que no coincida con el $\displaystyle\lim_n \int_a^b f_n$.

3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada. Definimos la *oscilación de f en x* por

$$\mathcal{O}_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \left\{ \sup_{|x-y|\le\delta} f - \inf_{|x-y|\le\delta} f \right\}.$$

   a) Demostrar que f es continua en x si y solo si $\mathcal{O}_f(x) = 0$.

   b) Demostrar el Teorema de Lebesgue: f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si todos los conjuntos $E_k = \{x \in [a, b] : \mathcal{O}_f(x) \ge 1/k\}$ con $k \in \mathbb{N}$ tienen medida nula[1].

4. Demostrar que un subconjunto B del eje real es abierto si y solo si se representa como una unión numerable disjunta de intervalos abiertos (finitos o infinitos).

5. Sea m^* la medida exterior de Lebesgue. Demostrar que:

   a) $m^*(I) = \mathrm{long}(I)$ para cualquier intervalo I de $\mathbb{R}$;
   Indicación: Demostrar primero que si $\{I_k\}_{k=1}^n$ es un recubrimiento finito de I por intervalos se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{long}(I_k) \ge \mathrm{long}(I)$. A continuación usar un argumento de "compacidad".

   b) $A \subset B \implies m^*(A) \le m^*(B)$;

   c) $m^*\Big(\bigcup_{k\ge1} A_k\Big) \le \sum_{k\ge1} m^*(A_k)$.

6. Demostrar que el conjunto D de números en $[0, 1]$ tal que su desarrollo decimal no contienen el 5 es un conjunto de medida (exterior de Lebesgue) cero (i.e., $m^*(D) = 0$).

7. *a*) Demostrar que todo conjunto numerable tiene medida (exterior de Lebesgue) nula.

   b) Demostrar que la unión numerable de conjuntos de medida (de Lebesgue) nula tiene medida nula.

8. *a*) Encontrar un conjunto denso en $[0, 1]$ de medida nula.

   b) Demostrar que si $A \subset [0, 1]$ cumple $m^*(A) = 1$, entonces A es denso en $[0, 1]$.

9. *a*) Con la misma notación de los ejercicios anteriores, demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$ para todo $B \subset \mathbb{R}$.

[1] Nótese que, por el apartado a), el conjunto de puntos de discontinuidad de f coincide con $\cap_{k=1}^\infty E_k$. La demostración de que la integrabilidad Riemann se sigue de que la medida de todos los conjuntos E_k sea nula es difícil.

b) Lebesgue definió la clase de subconjuntos medibles de $[0,1]$ como la de aquellos $A \subset [0,1]$ tales que $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$, (donde $\mathcal{C}A = [0,1] \setminus A$). Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces A es medible.

10. Definimos la sucesión de funciones $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\cos(\pi m! x)\big)^{2n}$ y luego la función $g(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ ($x \in [0,1]$). (Observad que las funciones f_m son límites puntuales de funciones continuas.) Decidir si f_m y g son integrables Riemann y si son integrables Lebesgue.

    ¿Es cierta la igualdad

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 \big(\lim_{m\to\infty} f_m(x)\big)\,dx$$

    (en algún sentido)?