Teoría de la Integral y de la Medida
Grado de Matemáticas y doble Grado Ing. Informática-Matemáticas

Al menos durante las primeras semanas, la asignatura se impartirá en forma híbrida (parte de los alumnos en el aula y otra parte a través de la plataforma Microsoft Teams, de acuerdo con las instrucciones que se pueden consultar en la página web del Departamento, `https://verso.mat.uam.es/`).

Objetivos

El curso profundiza en la noción intuitiva de "medir" conjuntos, a partir de los principios establecidos por la teoría de Henri Lebesgue a comienzos del siglo XX. Esto a su vez proporciona el marco adecuado para la noción de integral en un sentido más amplio que el conocido hasta entonces. Se persigue que el alumno domine las nuevas herramientas que la teoría proporciona, como los teoremas de convergencia, los de Fubini y del cambio de variable y el teorema de Radon-Nikodym, básicas para el desarrollo moderno de las teorías de ecuaciones en derivadas parciales y de la probabilidad entre otras.

Temario de la asignatura

1. Introducción. La integral hasta 1900. La integral de Riemann. Idea de la integral de Lebesgue. La medida de Lebesgue. El problema de medir conjuntos.

2. La teoría de la integral de Lebesgue. Conjuntos medibles, medidas, funciones simples. Integral respecto de una medida. Teoremas de convergencia monótona y dominada, lema de Fatou; algunas aplicaciones.

3. Espacios de medida. Ejemplos: la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, la medida de "contar", espacios de probabilidad. Construcción de Caratheodory. Medidas de Lebesgue-Stieltjes en $\mathbb{R}$. Distintos modos de convergencia de funciones. Comparación entre las integrales de Lebesgue y de Riemann.

4. Medidas producto y medidas inducidas por una función. La medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y sus simetrías. El teorema del cambio de variable.

5. Integrales en un orden dado y el teorema de Fubini.

6. Medidas y derivadas. El teorema de derivación de Lebesgue. Medidas absolutamente continuas; medidas singulares. El Teorema de Radon-Nikodym.

Bibliografía

- Folland, Gerald B.: *Real Analysis*, 2nd edition, John Wiley, 1999.
- Rudin, Walter: *Análisis real y complejo.* McGraw Hill, 1974.
- Stein, E.M.; Shakarchi, R.: *Real Analysis.* Princeton Lectures in Analysis III, 2005.
- De Barra, G.: *Measure Theory and Integration.* John Wiley, 1981.
- Bartle, Robert G.: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.* Wiley Classics Library. John Wiley, 1995.
- Nelson, Gail S.: *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration.* Student Mathematical Library, 78. AMS, 2015.
- Royden, H.L.:*Real Analysis.* Prentice Hall-Inc, 1988.
- Tao, Terence: *An Introduction to Measure Theory.* Grad Studies in Math, 126; AMS, 2011.
- Taylor, Michael E.: *Measure Theory and Integration.* Grad Studies in Math, 76; AMS, 2006.

Evaluación: Habrá un examen parcial, cuyas fecha se anunciará próximamente. La calificación de la convocatoria ordinaria vendrá determinada por el valor de

$$\mathbf{max(0.3\,P + 0.7\,F;\ 0.1\,P + 0.9\,F) + \epsilon,}$$

siendo $\mathbf{P}$ la nota del examen parcial, $\mathbf{F}$ la del final y $\boldsymbol{\epsilon}$ la de la participación activa en clase (entrega de ejercicios, etc.), sobre un máximo de 0.5.
Fecha de los exámenes finales. Ordinario: 19/1/2022 (tarde); extraordinario: 1/7/2022 (tarde).

Profesores:
Fernando Quirós (módulo 8, despacho 209) *fernando.quiros@uam.es*
Dmitry Yakubovich (módulo 8, despacho 204) *dmitry.yakubovich@uam.es*