---

1. (2,5 puntos) Sea a una constante positiva.

a) Utilizando los teoremas del curso, demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}\,\mathrm{d}x}{1-e^{-ax}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(1+na)^2}\,.$$

b) Demostrar que

$$\int_0^\infty \frac{xe^{-x}\,\mathrm{d}x}{1+e^{-ax}} = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(1+na)^2}\,.$$

---

2. (2,5 puntos) Sean X, Y dos conjuntos disjuntos, y sea $Z = X \cup Y$. Dadas medidas exteriores finitas μ_* en X y ν_* en Y, definimos para todo conjunto $A \subset Z$

$$\eta_*(A) = \mu_*(A \cap X) + \nu_*(A \cap Y).$$

a) Demostrar que η_* es una medida exterior en Z.

b) Demostrar que un subconjunto A de Z es η_*-medible si y solo si $A \cap X$ es μ_*-medible y $A \cap Y$ es ν_*-medible.

---

3. (2,5 puntos) Dadas unas funciones $f, g \in L^1([0,1], \mathrm{d}t)$, definimos

$$F(x) = \int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G(x) = \int_{[0,x]} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) ¿Es cierto que F y G son continuas en $[0,1]$? Dar un ejemplo en el que F no es diferenciable en algún punto del intervalo $[0,1]$.

b) Demostrar que $\int_{[0,1]} f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = F(1)G(1) - \int_{[0,1]} F(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ (es una extensión de la fórmula de integración por partes a un contexto más amplio).

Indicación: comprobar que se puede aplicar el teorema de Fubini a la función $H(x,y)$, definida por $H(x,y) = f(x)g(y)$, si $x < y$, y $H(x,y) = 0$, si $x \geq y$.

---

4. (2,5 puntos) Sea μ una medida finita en un espacio medible $(X, \mathcal{A})$ y sean a, b dos funciones integrables no negativas en X. Consideramos las medidas $d\alpha = a\,\mathrm{d}\mu$ y $d\beta = b\,\mathrm{d}\mu$.

a) Demostrar que α, β son mutuamente singulares si y solo si $ab = 0$ en μ-casi todo punto.

b) Ponemos $N_a = \{x \in X : a(x) = 0\}$, $N_b = \{x \in X : b(x) = 0\}$. Demostrar que α es absolutamente continua respecto de β si y solo si $\mu(N_b \setminus N_a) = 0$ (en otras palabras, si $N_b \subset N_a \cup E$, donde E es un conjunto de medida 0).

c) Sea χ_{N_b} la función característica del conjunto N_b. Ponemos $f(x) = 0$, si $x \in N_b$, y $f(x) = a(x)/b(x)$, si $x \in X \setminus N_b$. Comprobar que

$$\alpha = f\beta + a\chi_{N_b}\mu.$$

Demostrar que esta es la descomposición de Radón - Nikodym de α en las partes absolutamente continua y mutuamente singular respecto de β.