**1. (2,5 puntos)** Sea $X$ un conjunto no vacío. Decimos que una colección $\mathcal{F}$ de funciones en $X$ con valores reales es una CP-*álgebra* si:

- las funciones constantes están en $\mathcal{F}$;
- $f+g$, $fg$ y $cf$ están en $\mathcal{F}$ si $f, g \in \mathcal{F}$, $c \in \mathbb{R}$;
- $f \in \mathcal{F}$ si $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$ con $f_n \in \mathcal{F}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

a) Demostrar que si $\mathcal{F}$ es una CP-álgebra, entonces el conjunto $\mathcal{A} = \{A \subset X : \mathbb{1}_A \in \mathcal{F}\}$ es una $\sigma$-álgebra en $X$.

*Indicación:* En lugar de demostrar que $\mathcal{A}$ es cerrada para uniones numerables quizá te convenga demostrar que es cerrada para intersecciones numerables.

b) ¿Es cierto que para cualquier $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$ sobre $X$ el conjunto de funciones $f : X \to \mathbb{R}$ acotadas y $\mathcal{A}$-medibles es una CP-álgebra?

---

*Solución.* a) $\underline{X \in \mathcal{A}}$: En efecto, $\mathbb{1}_X = 1 \in \mathcal{F}$, al tratarse de una función constante, por la primera propiedad de las CP-álgebras.

$\underline{E \in \mathcal{A} \Rightarrow E^c \in \mathcal{A}}$: En efecto, $E \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathbb{1}_E \in \mathcal{F}$. Ahora bien, $\mathbb{1}_E = 1 - \mathbb{1}_{E^c}$. Por consiguiente, usando la segunda propiedad de las CP-álgebras, $\mathbb{1}_E \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \mathbb{1}_{E^c} \in \mathcal{F}$. Concluimos observando que $E^c \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathbb{1}_{E^c} \in \mathcal{F}$.

$\underline{\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k\in\mathbb{N}} E_k \in \mathcal{A}}$: La clave es observar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^n E_k} = \prod_{k=1}^n \mathbb{1}_{E_k}.$$

Por consiguiente, puesto que $E_k \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \mathbb{1}_{E_k} \in \mathcal{F}$, si $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, por la segunda propiedad de las CP-álgebras, $\mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^n E_k} \in \mathcal{A}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para concluir, observamos que $\mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^\infty E_k} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^n E_k}$. Usando la tercera propiedad de las CP-álgebras tenemos entonces que $\mathbb{1}_{\bigcap_{k=1}^\infty E_k} \in \mathcal{F}$, y por tanto que $\bigcap_{k=1}^\infty E_k \in \mathcal{A}$, como queríamos demostrar.

b) No es cierto. Es trivial ver que las dos primeras condiciones para ser CP-álgebra se cumplen, pero no necesariamente la tercera. Para mostrar un contraejemplo consideramos la $\sigma$-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $\mathcal{M}$. La función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

es $\mathcal{M}$-medible, pero no es acotada. Sin embargo, es límite de puntual de funciones $\mathcal{M}$-medibles y acotadas,

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}, \qquad f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & |x| > 1/n, \\ n^2 x, & |x| \leq 1/n. \end{cases}$$

**2. (2,5 puntos)** Consideramos el espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función integrable y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función acotada, medible y continua en 1. Demostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-n,n)} f\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big) g(x)\, \mathrm{d}m(x)$$

existe y determinar su valor.

---

*Solución.* Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$h_n(x) = f\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big) g(x) \mathbb{1}_{(-n,n)}(x).$$

Puesto que $f$ es continua en 1, se sigue que $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = f(1)g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Por otra parte, $f$ es acotada: existe $M \in [0, \infty)$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente,

$$|h_n(x)| \leq M|g(x)| \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \text{ y para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Puesto que $g$ es integrable, también lo es $M|g|$. Así que lo único que falta para poder aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada es comprobar que las funciones $h_n$, $n \in \mathbb{N}$, son medibles.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $v_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $v_n(x) = f\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big)$. Dado, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{N}$, sea $A_\alpha^n := \{x \in \mathbb{R} : v_n(x) > \alpha\}$. Es inmediato comprobar que $A_\alpha^n = n^2(-1 + B_\alpha)$, con $B_\alpha := \{y \in \mathbb{R} : f(y) > \alpha\}$. Por ser $f$ medible, $B_\alpha \in \mathcal{M}$ para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, y concluimos que $A_\alpha^n \in \mathcal{M}$, puesto que la $\sigma$-álgebra de Lebesgue es cerrada por traslaciones y dilataciones. Eso demuestra que cada $v_n$ es medible. La medibilidad de $g$ es inmediata, por ser integrable, y también la de $\mathbb{1}_{(-n,n)}$, por ser la indicatriz de un conjunto medible. De ello se deduce la medibilidad de cada función $h_n$, por ser producto de funciones medibles.

Por el Teorema de la Convergencia Dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{(-n,n)} f\Big(1 + \frac{x}{n^2}\Big) g(x)\, \mathrm{d}m(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n\, \mathrm{d}m) = \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} h_n)\, \mathrm{d}m = f(1) \int_{\mathbb{R}} g\, \mathrm{d}m.$$

---

**3. (2,5 puntos)** Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \mathrm{e}^{-xy}$. Partiendo del espacio de medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{M}, m)$, formamos el espacio de medida producto $(\mathbb{R}^2, \mathcal{M} \otimes \mathcal{M}, m \otimes m)$.

a) ¿Es $f$ integrable respecto de la medida $m \otimes m$ en una semibanda $[a, b] \times [0, \infty)$ (donde $0 \leq a < b$)? Considerar por separado los casos $a = 0$ y $a > 0$.

b) Demostrar la igualdad $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ay} - \mathrm{e}^{-by}}{y}\, \mathrm{d}y = \log b - \log a, \quad 0 < a < b.$

(Recordamos que toda función continua en $[a, b] \times [0, \infty)$ es medible respecto de la medida producto $m \otimes m$.)

*Solución.* a) La función $f$ es continua, y por tanto $(m \otimes m)$-medible ($m \otimes m$ contiene a los abiertos de $\mathbb{R}^2$). Como es no negativa, su integral en cualquiera de las semibandas siempre existe, y por el teorema de Tonelli, coincide con las integrales iteradas. Pero podría ser infinita, y por tanto no ser integrable.

Supongamos primero que $a = 0$. Obviamente, dado $b > 0$, para todo $n > 1$ se tiene

$$\begin{aligned}\int_{[0,b]\times[0,\infty)} f\,\mathrm{d}(m \otimes m) &\geq \int_{[0,b]\times[1,n]} f\,\mathrm{d}(m \otimes m) = \int_{[1,n]} \Big( \int_{[0,b]} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}m(x) \Big)\,\mathrm{d}m(y) \\ &= \int_1^n \Big( \int_0^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y = \int_1^n \frac{1-\mathrm{e}^{-by}}{y}\,\mathrm{d}y \\ &\geq (1-\mathrm{e}^{-b}) \int_1^n \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y \geq (1-\mathrm{e}^{-b}) \log n \to \infty \quad \text{cuando } n \to \infty.\end{aligned}$$

Por tanto, $f$ no es integrable en $[0,b] \times [0,\infty)$.

Suponemos ahora que $0 < a < b$. En este caso,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[0,\infty)} f\,\mathrm{d}(m \otimes m) &= \int_{[a,b]} \Big( \int_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}m(y) \Big)\,\mathrm{d}m(x) = \int_a^b \Big( \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_a^b \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{x}\Big|_{y=0}^{\infty}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log b - \log a < \infty,\end{aligned}$$

de modo que $f$ es integrable en $[a,b] \times [0,\infty)$.

b) Integrando primero en $y$ y luego en $x$, en el apartado b) hemos obtenido, gracias al teorema de Tonelli, que

$$\int_{[a,b]\times[0,\infty)} f\,\mathrm{d}(m \otimes m) = \log b - \log a.$$

Integrando ahora primero en $x$ y luego en $y$, usando otra vez el teorema de Tonelli,

$$\begin{aligned}\int_{[a,b]\times[0,\infty)} f\,\mathrm{d}(m \otimes m) &= \int_{[0,\infty)} \Big( \int_{[a,b]} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}m(x) \Big)\,\mathrm{d}m(y) = \int_0^\infty \Big( \int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xy}}{y}\Big|_{x=a}^{b}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ay}-\mathrm{e}^{-by}}{y}\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Combinando ambas identidades se obtiene el resultado deseado.

---

**4. (2,5 puntos)** Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible y $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de medidas finitas no triviales en $\mathcal{A}$. Demostrar que existe una medida finita $\lambda$ en $X$, definida sobre la misma $\sigma$-álgebra $\mathcal{A}$, tal que cada una de las medidas $\mu_n$ es absolutamente continua respecto de $\lambda$, $\mu_n \ll \lambda$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

*Indicación:* Tomar $\lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \mu_n(E)$, eligiendo las constantes $c_n > 0$ de forma adecuada.

---

*Solución.* Tomamos $c_n = 2^{-n}/\mu_n(X)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Por ser cada $\mu_n$ una medida finita no trivial, $\mu_n(X) \in (0, \infty)$, de forma que las constantes $c_n$ están bien definidas y son positivas. Puesto que cada $\mu_n$ es una medida finita, $0 \le \mu_n(E) \le \mu_n(X) < \infty$ para cada $E \in \mathcal{A}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, la cantidad $\lambda(E) = \text{lím}_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} c_n \mu_n(X)$ está bien definida para todo $E \in \mathcal{A}$ (es el límite de una sucesión monótona no decreciente) y además es finita y no negativa,

$$0 \le \lambda(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \mu_n(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Puesto que $\mu_n(\emptyset) = 0$ para cada $n \in \mathbb{N}$, por ser cada $\mu_n$ una medida, se tiene que $\lambda(\emptyset) = 0$.

Por otra parte, sea $\{E_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una familia numerable de conjuntos $\mathcal{A}$-medibles disjuntos dos a dos. Entonces, usando que cada $\mu_n$ es una medida en $\mathcal{A}$ y el teorema de Tonelli para cambiar el orden de sumación,

$$\begin{aligned}\lambda(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \mu_n(\cup_{k\in\mathbb{N}} E_k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(E_k) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \mu_n(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \mu_n(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(E_k),\end{aligned}$$

y concluimos que $\lambda$ es una medida.

La medida $\lambda$ es de probabilidad, y por tanto finita (esto último ya lo sabíamos). En efecto,

$$\lambda(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \mu_n(X) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 1.$$

Comprobemos finalmente que cada $\mu_n$ es absolutamente continua con respecto a $\lambda$. Esto se sigue de inmediato del hecho de que

$$\frac{2^{-n}}{\mu_n(X)} \mu_n(E) \le \lambda(E) \quad \text{para todo } E \in \mathcal{A} \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

De hecho, podíamos elegir constantes positivas $c_n$ cualesquiera, tales que la suma $\sum c_n \mu_n(X)$ converge.

---