

1.- Definimos

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 3 \\ 4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

Sea dF la medida de Lebesgue Stieltjes asociada a F . Calcular: $dF(\{1\})$, $dF(\{2\})$, $dF((1, 3))$, $dF((1, 3))$, $dF([1, 3])$, $dF([1, 3])$.

2.- Dar un ejemplo de una función de distribución F tal que

$$dF(a, b) < F(b) - F(a) < dF[a, b]$$

para algunos a y b siendo dF la medida correspondiente a F .

3.- Sea μ la medida de contar sobre \mathbb{R} y $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. Para un conjunto fijado $A \subset \mathbb{R}$, definimos $\nu(B) = \mu(B \cap A)$ para todo $B \subset \mathbb{R}$.

a) Si $A = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ ¿es ν una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

b) Si $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ ¿es ν una medida de Lebesgue Stieltjes? En caso afirmativo hallar su función de distribución.

4.- Sea $F(x)$ la función de distribución sobre \mathbb{R} dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ 1 + x & \text{si } x \in [-1, 0) \\ 2 + x^2 & \text{si } x \in [0, 2) \\ 9 & \text{si } x \in [2, \infty) \end{cases}$$

Si dF es la medida de Lebesgue Stieltjes correspondiente a F , hallar la medida dF de los siguientes conjuntos: $\{2\}$, $[-1/2, 3)$, $(-1, 0] \cup (1, 2)$, $[0, 1/2) \cup (1, 2]$, $\{x \in \mathbb{R} : |x| + 2x^2 > 1\}$.

5.- a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ no-negativa e integrable Lebesgue y tal que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$. Probar que $F(x) = \int_{-\infty}^x f(y)dy$ es una función de distribución de probabilidad y además F es continua. (f se denomina **función de densidad**)

b) Si $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0, & \text{en el resto,} \end{cases}$ hallar $F(x)$.

6.- Sea

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases} \quad k > 0$$

Determinar el valor de k para que f sea la función de densidad de una medida de probabilidad. Determinar la función de distribución.

7.- Supongamos que la función de probabilidad que mide la duración en minutos de las conferencias telefónicas viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-kx}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

siendo $k \geq 0$ una constante conocida.

- Hallar α para que f sea una densidad de probabilidad.
 - Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure más de tres minutos.
 - Si $k = \frac{1}{2}$, calcular la probabilidad de que una conversación dure entre 3 y 6 minutos.
-

8.- Dada la función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, -1) \\ \frac{1}{3} & \text{si } x \in [-1, \sqrt{2}) \\ \frac{1}{2} + \frac{x-\sqrt{2}}{10} & \text{si } x \in [\sqrt{2}, 5) \\ 1 & \text{si } x \in [5, \infty) \end{cases}$$

Si dF es la medida de probabilidad correspondiente, calcular la medida de los conjuntos:
 \mathbb{R} ; $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [\sqrt{2}, 5]$; $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-2, \sqrt{2}]$; $\mathbb{Q} \cap [1, 6]$.

9.- Sea F una función de distribución en \mathbb{R} . a) Probar que el conjunto de puntos de discontinuidad de F es numerable. b) Probar que el conjunto de puntos de continuidad es denso en \mathbb{R} .

(Sugerencia: F es monótona luego en sus puntos de discontinuidad hay saltos).

10.- Sea dF la medida de Lebesgue-Stieltjes sobre \mathbb{R} correspondiente a una función de distribución continua F no trivial.

- Probar que si A es numerable entonces $dF(A) = 0$.
 - Probar que existen conjuntos A tales que $dF(A) > 0$ y A no contiene ningún intervalo abierto.
 - Si $dF(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, ¿tiene que ser A denso en \mathbb{R} ?
- Sugerencia: Para c) construir una función $F(x)$ que sea constante en un intervalo.
-

11.- Sea $F : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ la función de distribución definida mediante $F(x) = \log(1+x)$, sea dF la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada a F . Calcular $dF \{ \text{Cantor} \}$.

Sugerencia: El conjunto de Cantor está contenido en 2^n intervalos de longitud $\frac{1}{3^n}$.

12.- Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de distribución y sea $G \subset \mathbb{R}$ un conjunto abierto. Supongamos que F es localmente constante en G (esto equivale a decir que F es constante sobre cualquier intervalo abierto, contenido en G). Demostrar que $\mu_F^*(G) = 0$, donde μ_F es la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada. Deducir que en este caso, cualquier subconjunto de G es medible respecto de μ_F .