Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2020-21)

Hoja nº 3

1. Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Se dice que un subconjunto $\gamma \in \mathcal{A}$, $\gamma \neq \emptyset$, *es un átomo de* $\mathcal{A}$ si ningún conjunto δ tal que $\emptyset \neq \delta \subsetneq \gamma$ pertenece a la σ-álgebra $\mathcal{A}$.

   a) Comprobar que dos átomos $\gamma_1 \neq \gamma_2$ de $\mathcal{A}$ son siempre disjuntos.

   b) Supongamos que $\mathcal{A}$ tiene k átomos y que X es su unión. ¿Cuántos elementos tiene $\mathcal{A}$?

   c) Supongamos ahora que $\mathcal{A}$ tiene una cantidad numerable de átomos y que, otra vez, X es su unión. ¿Qué cardinalidad tiene la σ-álgebra $\mathcal{A}$?

2. Sea $\mathcal{A}$ la σ álgebra formada por $\{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, 0], (0, \infty)\}$. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in (-\infty, 0], \\ 1 & \text{si } x \in (0, 1], \\ 2 & \text{si } x \in (1, \infty). \end{cases}$$

   ¿Es f medible? ¿Cómo son en general las funciones medibles $f : (\mathbb{R}, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$?

3. Sea $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ una función medible no-negativa, μ una medida σ -finita en $\mathcal{A}$. Probar que $f(x) = \lim t_n(x)$ siendo $\{t_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones simples no negativas, tales que t_n toma valores distintos de cero solamente en un conjunto de medida finita.

   Sugerencia: Construir $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \ldots \subset \mathcal{B}_n \subset \ldots$, donde $\mu(\mathcal{B}_n\} < \infty$, tomar $t_n = s_n \chi_{\mathcal{B}n}$, siendo s_n una sucesión creciente de funciones simples no-negativas con límite f.

4. Probar que si $f : X \to \mathbb{R}$ verifica que $\{x \in X : f(x) > r\}$ es medible para todo $r \in \mathbf{Q}$, entonces f es medible. (El resultado es cierto en general si en la hipótesis figura cualquier subconjunto denso de $\mathbb{R}$, en lugar de $\mathbf{Q}$.)

5. Dadas funciones medibles $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, demostrar que $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f + g$ y fg son medibles.

6. Para funciones $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas?
   a) $| f |$ medible $\Rightarrow f$ medible.
   b) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible.
   c) $f_1.f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ ó f_2 medible
   d) $f_1 + f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible
   e) $f_1 - f_2$ medible $\Rightarrow f_1$ y f_2 medible

7. Sea $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, funciones medibles.

   (a) Demostrar que $\inf_n f_n$ y $\sup_n f_n$ son funciones medibles.

   Indicación. $\{\sup_n f_n > a\} = \cup_n \{f_n > a\}$.

   (b) Deducir que $\limsup f_n$, $\liminf f_n$ son medibles.

   (c) Demostrar que el conjunto $A = \{x \in X : \text{existe } \lim_{n\to\infty} f_n(x)\}$ es un elemento de $\mathcal{A}$, y que $\lim f_n$ es medible.

   (d) Demostrar que si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A}$-medible y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, entonces la composición $g \circ f$ es $\mathcal{A}$-medible.

8. Sea $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean X_1 y X_2 dos **variables aleatorias** sobre él, esto es, dos funciones medibles de $(\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}$, y F_{X_1} y F_{X_2} las **funciones de distribución** de las medidas de probabilidad inducidas por X_1 y X_2 respectivamente, definidas por

$$F_{X_j}(x) = P\{\omega \in \Omega : X_j(\omega) \leq x\}, \quad j = 1, 2.$$

Demostrar que si $P\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) = X_2(\omega)\} = 1$, entonces $F_{X_1}(x) = F_{X_2}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

9. Consideramos el espacio de probabilidad $(\mathbf{N}, \mathcal{P}(\mathbf{N}), P)$, siendo $P(\{n\}) = \frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$ Definimos $X : \mathbf{N} \to \{0, 1, \ldots k-1\}$ mediante $X(n) =$ resto de n (modulo k), ($k \in \mathbf{N}$, fijo). Sea P^* la probabilidad inducida por X (ver ejercicio 16, Hoja 2). Calcular $P^*(r)$, $0 \leq r \leq k-1$.

10. Se considera el espacio de probabilidad $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P)$, donde $P(A) = \int_A f(x)\, dx$ viene dada por la función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1], \\ 0 & \text{si } x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Sea $X : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$X(x) = \begin{cases} -2 \log x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Hallar F_X, la función de distribución de la probabilidad inducida por X.

11. Sea $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $f(x) = 0$ si x es racional, $f(x) = n$ si n es el número de ceros inmediatamente después del punto decimal en la representación de x en la escala decimal. Calcular $\int f\, dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

12. Sea $f(x)$ la función definida en $(0, 1)$ mediante $f(x) = 0$, si x es racional, $f(x) = [\frac{1}{x}]$ si x es irracional ($[\frac{1}{x}]$ es la parte entera de $\frac{1}{x}$). Calcular $\int f(x)\, dm$ siendo m la medida de Lebesgue.

13. Comprobar que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x}\, dm = \infty$, siendo m la medida de Lebesgue.

14. Sea $f_n(x) = \min(f(x), n)$ siendo $f(x) \geq 0$ y medible. Demostrar que $\int f_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu$.

15. Sean f_n funciones medible no negativas y acotadas. Supongamos que $f_n(x) \downarrow f(x)$ y que para algún k se verifica $\int f_k\, d\mu < \infty$. Probar que (**TCM para sucesiones decrecientes**):

$$\lim \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu.$$

(Sugerencia: Formar la sucesión $g_n = f_k - f_{k+n}$).

16. Sea $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3, \ldots, \geq a_n, \ldots,$ una sucesión de números positivos tales que $\lim a_n = 0$. Sea $f_n(x) = a_n/x$ para $x \geq a > 0$. Comprobar que f_n decrece a cero uniformemente pero $\int_a^\infty f_n\, dm = \infty$ para todo n.

17. Sea $f_n : [0, 1] \to [0, \infty)$, definida mediante

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si } 0 < x < \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Comprobar que $f_n \to 0$ puntualmente, pero $\int f_n\, dm = 1$.