Teoría de la Integral y de la Medida (curso 2020-21)
Hoja n$^{\underline{0}}$ 1 *(Introducción)*

1. Demostrar que un subconjunto B del eje real es abierto si y solo si se representa como una unión numerable disjunta de intervalos abiertos (finitos o infinitos).

2. Sea $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ monótona y acotada. Probar que f es integrable Riemann.

3. Definimos la sucesión de funciones $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} \big(\cos(\pi m!x)\big)^{2n}$ y luego la función $g(x) = \lim_{m\to\infty} f_m(x)$ ($x \in [0, 1]$). (Observad que las funciones f_m son límites puntuales de funciones continuas.) Decidir si f_n y g son integrables Riemann y si son integrables Lebesgue.

   ¿Es cierta la igualdad
   $$\lim_{m\to\infty} \int_0^1 f_m(x)\,dx = \int_0^1 \big(\lim_{m\to\infty} f_m(x)\big)\,dx$$
   (en algún sentido)?

4. Probar que si las funciones $f_n : [a, b] \to \mathbf{R}$ son integrables Riemann y forman una sucesión uniformemente convergente a cierta función f, entonces f es integrable Riemann y se tiene $\displaystyle\int_a^b f = \lim_n \int_a^b f_n$. Dar ejemplos de cómo, si el límite NO es uniforme, *puede* que no exista la integral $\displaystyle\int_a^b f$, o que no coincida con el $\displaystyle\lim_n \int_a^b f_n$.

5. Probar que para cada $\epsilon > 0$ hay abiertos B que son densos en $I = [0, 1]$ y que cumplen $|B| \leq \epsilon$. (Para un abierto B, $|B|$ denota la suma de las longitudes de los intervalos que forman sus componentes conexas). *Indicación: considerar los complementarios de los conjuntos de Cantor generalizados.*

6. Si m^* denota la medida exterior de Lebesgue definida en clase, demostrar que dado un intervalo I cualquiera de $\mathbb{R}$ se tiene $m^*(I) = \mathrm{long}(I)$. *Indicación*: probar primero que si $\{I_k\}_{k=1}^n$ es un recubrimiento finito de I por intervalos se tiene que $\displaystyle\sum_{k=1}^n \mathrm{long}(I_k) \geq \mathrm{long}(I)$.

   A continuación usar un argumento de "compacidad".

   Probar asimismo las desigualdades:

   ii) $A \subset B \implies m^*(A) \leq m^*(B)$

   iii) $m^*\left(\bigcup_{k\geq 1} A_k\right) \leq \sum_{k\geq 1} m^*(A_k)$

7. Probar que todo conjunto numerable tiene medida (exterior de Lebesgue) nula.

8. Probar que la unión numerable de conjuntos de medida (de Lebesgue) nula tiene medida nula.

9. *a*) Encontrar un conjunto denso en $[0, 1]$ de medida nula.

   b) Probar no obstante que si $A \subset [0, 1]$ cumple $m^*(A) = 1$, entonces A es denso en $[0, 1]$.

10. *a*) Con la misma notación de los ejercicios anteriores, demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces $m^*(A \cup B) = m^*(B)$, $\forall B \subset \mathbb{R}$.

b) Lebesgue definió la clase de subconjuntos medibles de $[0,1]$ como la de aquellos $A \subset [0,1]$ tales que $m^*(A) + m^*(\mathcal{C}A) = 1$, (donde $\mathcal{C}A = [0,1] \setminus A$). Demostrar que si $m^*(A) = 0$ entonces A es medible.

11. Probar que el conjunto D de números en $[0,1]$ tal que su desarrollo decimal no contienen el 5 es un conjunto de medida (exterior de Lebesgue) cero (i.e., $m^*(D) = 0$).

12. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada. Definimos $\mathcal{O}_f(x) = \lim_{\delta \to 0^+} \left\{ \sup_{|x-y| \leq \delta} f - \inf_{|x-y| \leq \delta} f \right\}$. [1]

   a) Probar que f es continua en x si y solo si $\mathcal{O}_f(x) = 0$.

   b) (*) Demostrar el Teorema de Lebesgue: f es integrable en el sentido de Riemann si y solo si $\forall k = 1, 2, \ldots$, el conjunto $E_k = \{x \in [a,b] : \mathcal{O}_f(x) \geq 1/k\}$ tiene medida nula.

[1] $\mathcal{O}_f(x)$ denota la oscilación de f en x.