Teoría de la Integral y de la Medida **Primer examen parcial, 3/11/20**

Grado de Matemáticas y Doble Grado

Departamento de Matemáticas, UAM

Para la nota máxima, basta sacar 10 puntos de los 12.

---

1. a) (2 puntos) Demostrar la existencia del siguiente límite y encontrar su valor

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^\infty \frac{(\cos x)^{2N}}{x^2}\,dx$$

(La medida es la de Lebesgue). Dar los enunciados completos del teorema (o teoremas) del curso, que se aplican.

b) (1 punto) Es una pequeña variación de **1a)**. ¿Existe el límite

$$\lim_{N\to\infty}\int_1^\infty \frac{(\cos x)^{N}}{x^2}\,dx\,?$$

Encontrar su valor, si es el caso.

---

2. (3 puntos) Definimos los intervalos $J_n = [0, 2^{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, y la función

$$g(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n}|x|^{-1/n}\chi_{J_n}(x).$$

Calcular $\int_{\mathbb{R}} g\,dm$, siendo m la medida de Lebesgue.

---

3. Sea $X = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ el conjunto de los números naturales.

Consideramos la colección $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $\mathbb{N}$, que consiste de conjuntos $B \subset \mathbb{N}$, para los cuales existe el límite

$$\eta(B) := \lim_{n\to\infty} \frac{\#\{k \in B : k \le n\}}{n}$$

(aquí $\#C$ significa el número de elementos de un conjunto C).

a) (1 punto) ¿Es cierto que $B \in \mathcal{U} \implies B^c \in \mathcal{U}$?

b) (1 punto) Comprobar que la función $\eta : \mathcal{U} \to [0, +\infty)$ es finitamente aditiva, es decir, si B_1 y B_2 pertenecen a la colección $\mathcal{U}$ y son **disjuntos**, entonces $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{U}$ y $\eta(B_1 \cup B_2) = \eta(B_1) + \eta(B_2)$.

c) (2 puntos) Comprobar que todo subconjunto finito de $\mathbb{N}$ es elemento de la colección $\mathcal{U}$. Dar un ejemplo de un conjunto $B \subset \mathbb{N}$, que no está en $\mathcal{U}$. Demostrar que $\mathcal{U}$ no es una σ-álgebra.

d)* (2 puntos) Demostrar que $\mathcal{U}$ tampoco es un álgebra. *Observación.* Recordemos que en b) hemos probado que si $A, B \in \mathcal{U}$ son disjuntos entonces su unión está en $\mathcal{U}$.
