CÁLCULO I

Elaborado en el Dpto. Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid
(Ingeniería Eléctrica. Curso 2010/2011)
Con modificaciones de D. Yakubovich

1.1 La recta real

Clases de números

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$.

Propiedades de $\mathbb{N}_0$: $(+)$ asociativa, conmutativa, elemento neutro (0),
$(\cdot)$ asociativa, conmutativa, elemento neutro (1),
$(+, \cdot)$ distributiva.
Problema: $x + 3 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{N}_0$.

- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \cdots\}$.

Propiedades: $(+)$ elemento inverso.
Problema: $2x + 3 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{Z}$.

- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$.

Propiedades: $(\cdot)$ elemento inverso salvo para el 0.
Problema: $x^2 - 2 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{Q}$.

- $\mathbb{R} = \{$ números con infinitas cifras decimales, precedidas por el signo $\pm$ $\} \cup \{0\}$.

$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \{$ números con infinitas cifras decimales no periódicas $\}$.
Propiedad: de completitud (ver más adelante).
Problema: $x^2 + 2 = 0$ no tiene solución $x \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ números complejos - se estudiarán en el segundo cuatrimestre.

Métodos de demostración matemática

- Demostración directa. $P \Rightarrow Q$.
- Demostración por reducción al absurdo. $P \Rightarrow Q$ es equivalente a (no Q) $\Rightarrow$ (no P).
- Demostración por inducción.

> *Principio de inducción matemática:* La propiedad $P(n)$ es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$ si se verifica $i)$ $P(1)$ es cierta; $ii)$ si $P(k)$ es cierta también lo es $P(k+1)$.

Propiedad de $\mathbb{N}$, equivalente al Principio de Inducción:

> **(*)** Si $A \subset \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ $\big[A$ es un subconjunto no vacío de $N\big]$ entonces A tiene un elemento mínimo.

La deducción del Principio de Inducción de la propiedad básica (*) de $\mathbb{N}$.
Vamos a razonar por reducción al absurdo. Supongamos que tenemos una propiedad $P(n)$ cumple

las condiciones *i)* e *ii)* que figuran en el Principio de Inducción, pero, sin embargo, $P(n)$ **no** se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos el conjunto

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \text{ la propiedad } P(n) \text{ no se cumple}\}.$$

Es no vacío, luego tiene un elemento mínimo m. Por i), $1 \notin A$, luego $m \geq 2$. Como m es el mínimo de A, $m-1 \notin A$. Por tanto, $P(m-1)$ es cierto, mientras que $P(m)$ es falso, lo que da una contradicción con ii).

Es fácil ver que, de hecho, la propiedad (*) es equivalente al Principio de inducción.

Desigualdades. Módulo (valor absoluto)

- **Relación de orden**. Cada $a \in \mathbb{R}$ verifica una y sólo una de: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$.
- $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$.
- $a \geq b \Leftrightarrow a > b$ o $a = b$.
- $a > b$ y $c > 0 \Rightarrow ac > bc$.
- **Valor absoluto** $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0. \end{cases}$

  $|a| \geq 0 \, \forall \, a \in \mathbb{R}$. $|a| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
  $|ab| = |a| \cdot |b|$.
  $|a + b| \leq |a| + |b|$.
  $\sqrt{a^2} = |a|$.
- **Distancia en $\mathbb{R}$:** $dist(a, b) = |a - b|$.

Cuantificadores: $\forall$ "para todo"; $\exists$ "existe".

Ejemplos:
1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} : \quad y^3 = x$.
Es decir, para todo x en $\mathbb{R}$ existe un y en $\mathbb{R}$ tal que $y^3 = x$. Es decir, todo x real tiene una raíz cúbica real. — *es cierto.*

2. $\exists y \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R} \quad y^3 = x$.
Es decir, existe un y en $\mathbb{R}$ tal que para para todo x en $\mathbb{R}$, $y^3 = x$. Es decir, existe un y real tal que todo x real es igual a y^3. — *obviamente, es falso.*

Intervalos. Subconjuntos de $\mathbb{R}$

- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$. **Abierto**.
- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$. **Cerrado**.

Equivalencia de notación

$$\{x \in \mathbb{R} : dist(x, -1) \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} : |x + 1| \leq 4\} = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x \leq 3\} = [-5, 3]$$

Def.:- $A \subset \mathbb{R}$ es acotado superiormente si $\exists \, M \in \mathbb{R} : x \leq M \, \forall \, x \in A$. M se denomina cota superior. Análogo inferiormente. Se dice que es **acotado** si lo es superior e inferiormente.

> *Principio de completitud:* Todo conjunto de $\mathbb{R}$ no vacío acotado superiormente posee una cota superior mínima, denominada **supremo**. Análogo para **ínfimo**.

- Si $\sup(A) \in A$ entonces se denomina **máximo**. Análogo para **mínimo**.

Ejemplos: El intervalo semiabierto $A = (1, 3]$ no tiene mínimo y tiene máximo. Se tiene $\inf(1, 3] = 1$ (es la mínima cota superior); $\min(1, 3]$ no existe; $\sup(1, 3] = \max(1, 3] = 3$.

Demostración del principio de completitud: Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto no vacío, acotado superiormente. Queremos ver que entre todas las cotas superiores de A existe el mínimo, llamado la mínima cota superior.
Fijamos cualquier elemento y de A. El conjunto

$$A + (1 - y) = \{x + 1 - y : \quad x \in A\}$$

es no vacío, está acotado superiormente y contiene 1. Si s es la mínima cota superior de $A+(1-y)$, entonces $s - 1 + y$ es la mínima cota superior de A. Por ello, basta considerar el caso cuando A contiene algún elemento positivo.
Como A está acotado superiormente, tiene una cota $n \in \mathbb{N}$. Según la propiedad (*) de $\mathbb{N}$, el conjunto

$$\{n \in \mathbb{N} : \quad n \text{ es una cota superior de } A\}$$

tiene un mínimo, que llamamos $m + 1$, donde $m \in \mathbb{N}_0$. Consideramos luego el mínimo

$$\min \left\{ \frac{k}{10} : \quad \frac{k}{10} \text{ es una cota superior de } A \right\}.$$

Este mínimo existe, por la propiedad (*) (considerar el conjunto $\{10x : x \in A\}$). Es mayor que m y menor que o igual a $m + 1$. Luego tiene la forma $m.d_1 + 0,1$, donde la cifra decimal $d_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
En el siguiente paso, consideramos el mínimo

$$\min \left\{ \frac{k}{100} : \quad \frac{k}{100} \text{ es una cota superior de } A \right\}.$$

De la misma forma que antes, vemos que este mínimo tiene la forma $m.d_1d_2 + 0{,}01$, con una parte entera no negativa y dos cifras decimales $d_1, d_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$.
Continuando este proceso, obtenemos una sucesión

$$m + 1,\ m.d_1 + 0{,}1,\ m.d_1d_2 + 0{,}01,\ m.d_1d_2d_3 + 0{,}001,\ \text{etc.} \tag{1}$$

de cotas superiores de A. Según la construcción, a cambio, ninguno de los números

$$m - 1,\ m.d_1,\ m.d_1d_2,\ m.d_1d_2d_3,\ textetc. \tag{2}$$

no es una cota superior de A. Tanto la sucesión (1) como la sucesión (2) tienden al número real no negativo

$$r = m.d_1d_2d_3d_4 \dots .$$

(Puede suceder que todas las cifras d_k, a partir de cierta posición, sean todas iguales a 9.)
Podemos ver que $r \in \mathbb{R}$ es una cota superior de A, mientras que para todo ε positivo, $r - \varepsilon$ ya no es una cota superior de este conjunto.
<u>Conclusión</u>: A tiene la mínima cota superior, que es igual a r. $\square$

Ejemplo: Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0,\ x^2 < 2\}$. Entonces, la sucesión que se obtiene en (1) es

$$2,\ 1{,}5,\ 1{,}42,\ 1{,}415,\ \text{etc.}$$

Es decir, $m = 1$, $d_1 = 4$, $d_2 = 1$, $d_3 = 4$, etc. El límite de la sucesión es igual a $\sup A = \sqrt{2} = 1{,}4142153\ldots \in \mathbb{R}$.

El plano

- $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x,\, y \in \mathbb{R}\}$

Los números reales x e y son las coordenadas de un punto (x, y) del plano coordenado $\mathbb{R}^2$. Por ejemplo, $(3, 4)$ significa el punto de $\mathbb{R}^2$, que tiene la primera coordenada 3 y la segunda coordenada 4.

- **Distancia en $\mathbb{R}^2$:** Si $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ son dos puntos en el plano $\mathbb{R}^2$, se define $dist(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

- Curvas elementales

Recta. $y = ax + b$.

Parábola. $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Circunferencia. $(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 = r^2$.

Elipse. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} + \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.

Hipérbola. $\dfrac{(x - c_1)^2}{a^2} - \dfrac{(y - c_2)^2}{b^2} = 1$.

Cónicas. $ax^2 + by^2 + cx + dy + e = 0$. (No estudiamos el caso en que aparecen términos cruzados xy)

1.2 Funciones elementales

Primeras definiciones y propiedades

> Una función es una regla cualquiera que hace corresponder un número real y sólo uno a cada número de un cierto conjunto $A \subset \mathbb{R}$. Se escribe $f \,:\, A \to \mathbb{R}$. $f(x)$ es el valor de la función f en el punto x.

El dominio de una función es el conjunto de números para los que está definida, y se denota por $D(f)$. La imagen es el conjunto $Im(f) = \{f(x) \,:\, x \in D(f)\}$.

- **Funciones elementales**: Polinomios, cocientes de polinomios, funciones trigonométricas, logaritmo y exponencial, raíces.

- **Dominio**.

Polinomios: $D = \mathbb{R}$.
Cocientes: $D = \{\text{denominador distinto de cero}\}$.
$\sqrt{x}$: $D = \{x \geq 0\}$.
$\operatorname{sen} x$ y $\cos x$: $D = \mathbb{R}$.
$\operatorname{tg} x$: $D = \{x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\}$ (donde no se anula $\cos x$).
e^x: $D = \mathbb{R}$.
$\log x$: $D = \{x > 0\}$.

- **Propiedades de inyectividad, etc**.

- $f : A \to B$ es **inyectiva** si dado $y \in B$ no existen x_1, $x_2 \in A$, $x_1 \neq x_2$ con $f(x_1) = f(x_2) = y$ (si suponemos $f(x_1) = f(x_2)$ entonces $x_1 = x_2$).

- $f : A \to B$ es **sobreyectiva** si dado $y \in B$ existe al menos un $x \in A$ con $f(x) = y$.

- $f : A \to B$ es **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva ($\forall\, y \in B\ \exists!\, x \in A\ :\ f(x) = y$).

En la gráfica de la función: si cada línea horizontal que pase por puntos de la imagen corta como mucho una vez, al menos una vez o exactamente una vez a la gráfica.

- **Simetrías**.
- Se dice que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ es **simétrico** si para todo $x \in A$, se tiene que $-x$ también pertenece a A.

- f es simétrica **par** si $\mathcal{D}(f)$ es simétrico y $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(f)$. Ejemplos: x^2, $\cos x$.

- f es simétrica **impar** si $\mathcal{D}(f)$ es simétrico y $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in \mathcal{D}(f)$. Ejemplos: x^3, $\operatorname{sen} x$.

- **Composición**.

$$f\ :\ A \to B, \quad g\ :\ C \to D$$

Condición: $f(A) \subset C$. En este caso definimos

$$h = g \circ f\ :\ A \to D$$

$$h(x) = g \circ f(x) = g(f(x)), x \in A.$$

En general $D(g \circ f) = \{x \in D(f)\ :\ f(x) \in D(g)\}$.
- **La función identidad** $Id : A \to A$ se define por $Id(x) = x,\ \ \forall x \in A$.

- **Función inversa**.

- $f : A \to B$ y $g : B \to A$ son funciones inversas si la composición es la función identidad,

$$\begin{array}{ll} g \circ f = Id\ :\ A \to A & \qquad f \circ g = Id\ :\ B \to B \\ g \circ f(x) = x\ \forall\, x \in A & \qquad f \circ g(x) = x\ \forall\, x \in B \end{array}$$

Se escribe $g = f^{-1}$ y $f = g^{-1}$. Existe la función inversa de $f : A \to B$ si f es biyectiva.
Ejemplos:

$$\begin{array}{lll} f\ :\ [0,\infty) \to [0,\infty), & f(x) = x^2, & f^{-1}(x) = \sqrt{x}, \\ f\ :\ \mathbb{R} \to (0,\infty), & f(x) = e^x, & f^{-1}(x) = \log x, \\ f\ :\ [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1], & f(x) = \operatorname{sen} x, & f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,sen} x, \\ f\ :\ [0,\pi] \to [-1,1], & f(x) = \cos x, & f^{-1}(x) = \arccos x, \\ f\ :\ (-\pi/2,\pi/2) \to \mathbb{R}, & f(x) = \operatorname{tg} x, & f^{-1}(x) = \operatorname{arc\,tg} x. \end{array}$$

Operaciones con gráficas de funciones.

- **Traslaciones**: horizontal $y = f(x+c)$, vertical $y = f(x) + c$.
- **Dilataciones**: horizontal $y = f(cx)$, vertical $y = cf(x)$.
- **Simetrías**: horizontal $y = f(|x|)$, vertical $y = |f(x)|$.
- **Inversiones**: horizontal $y = f(1/x)$, vertical $y = 1/f(x)$.

Coordenadas polares.

$$\begin{array}{lll} (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \rightsquigarrow & r = \sqrt{x^2+y^2}, & \theta = \operatorname{arc\,tg} y/x, \\ (r,\theta) \in [0,\infty) \times [0,2\pi) \ \rightsquigarrow & x = r\cos\theta & y = r \operatorname{sen}\theta. \end{array}$$

1.3 Límites de funciones

Primeras definiciones y propiedades

Límite: Decimos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ (y se lee: el límite cuando x tiende a x_0 de $f(x)$ es l) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x)-l| < \varepsilon$ cuando $0 < |x-x_0| < \delta$.

- Ejemplo: $\lim_{x\to 4}(3x-7) = 5$ pues $|3x-7-5| = 3|x-4| < 3\delta$; basta elegir $\delta = \varepsilon/3$.

- Si existe el límite es único. Es decir, si l y m verifican la definición, entonces $l = m$.

- **Propiedades:** Si existen $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:

$$\lim_{x\to x_0} \big(cf(x)\big) = cl\,, \quad \text{si } c \in \mathbb{R}\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)+g(x)\big) = l+m\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \big(f(x)g(x)\big) = lm\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}\,, \quad \text{si } m \neq 0\,.$$

- **Más ejemplos:**

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)\ , \quad \text{si } p(x) \text{ es un polinomio}\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}\ , \quad \text{si } x_0 > 0\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}\,.$$

$$\lim_{x\to x_0} \log_a x = \log_a x_0\ , \quad \text{si } a>0,\ x_0>0\,.$$

- **Límites laterales.**

- Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ (y se lee límite cuando x tiende a x_0 por la derecha) si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - l| < \varepsilon$ cuando $x_0 < x < x_0 + \delta$.
- Análogamente por la izquierda, $x \to x_0^-$.

- Se tiene que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ si y sólo si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = l$.

- **Límites infinitos y en el infinito. La definición general del límite.**

- Decimos que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ si para todo número real M existe un $\delta > 0$ tal que $f(x) > M$ cuando $0 < |x - x_0| < \delta$.

En general, conviene introducir *expresiones* del tipo

$$x_0, x_0^-, x_0^+, -\infty, +\infty \tag{*}$$

para uniformizar límites bilaterales, límites unilaterales, límites infinitos y límites en $\pm\infty$. Aquí $x \in \mathbb{R}$. Las expresiones $x_0^{\pm}$ (es decir, x_0^- y x_0^+) se van a usar en límites unilaterales.
Dada una expresión α, definimos sus entornos de la siguiente manera.

- *Los entornos de un* $x_0 \in \mathbb{R}$: conjuntos del tipo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$;
- *Los entornos de* x_0^-, donde $x \in \mathbb{R}$: conjuntos del tipo $(x_0 - \varepsilon, x)$, donde $\varepsilon > 0$;
- *Los entornos de* x_0^+, donde $x \in \mathbb{R}$: conjuntos del tipo $(x_0, x_0 + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$;
- *Los entornos de* $-\infty$: conjuntos del tipo $(-\infty, M)$, donde $M \in \mathbb{R}$;
- *Los entornos de* $+\infty$: conjuntos del tipo $(M, +\infty)$, donde $M \in \mathbb{R}$.

Definimos también entornos perforados de α de la siguiente forma. Si $\alpha = x_0$, sus entornos perforados tienen la forma $(x_0 - \varepsilon, x_0) \cup (x_0, x_0 + \varepsilon)$, donde $\varepsilon > 0$. En los demás 4 casos, los entornos perforados van a ser lo mismo que los entornos.

Definición general del límite: Sean α, β dos expresiones del tipo (*). Decimos que

$$\lim_{x \to \alpha} f(x) = \beta$$

si para todo entorno $\mathcal{U}(\beta)$ de β existe un entorno perforado $\dot{\mathcal{V}}(\alpha)$ de α tal que

$$x \in D(f) \cap \dot{\mathcal{V}}(\alpha) \quad \Longrightarrow \quad f(x) \in \mathcal{U}(\beta).$$

Ejemplo: Afirmamos que $\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$. Efectivamente, aquí $\alpha = -\infty$, $\beta = 0^-$, $f(x) = 1/x$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Con lo cual $\mathcal{U}(\beta) = (-\infty, M)$, $\dot{\mathcal{V}}(\alpha) = (-\varepsilon, 0)$, donde $M \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. De forma que nuestra afirmación sobre el límite se descifra como

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists M \in \mathbb{R} : \; x \neq 0, x < M \quad \Longrightarrow \; 1/x \in (-\varepsilon, 0).$$

Es, evidentemente, cierto (basta poner $M = -1/\varepsilon$).

Comentario: En la definición general de arriba, el límite ha de tener sentido. Es decir, para todo entorno perforado $\dot{\mathcal{V}}(\alpha)$ de α, el conjunto $D(f) \cap \dot{\mathcal{V}}(\alpha)$ ha de ser no vacío. Entonces el límite es único. Observamos que si $\lim_{x \to \alpha} f(x) = y_0^+$ o $\lim_{x \to \alpha} f(x) = y_0^-$, también es cierto que $\lim_{x \to \alpha} f(x) = y_0$. Pero $\lim_{x \to \alpha} f(x) = y_0^+$ es incompatible con $\lim_{x \to \alpha} f(x) = y_0^-$.

Ejemplos: No tiene sentido hablar del límite $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{1 - x^2}$, porque si $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, entonces $D(f) = [-1, 1]$, y la intersección $D(f) \cap (-\infty, M)$ es vacía, si $M < -1$.
A cambio, tiene sentido hablar del límite $\lim_{x \to +\infty} \sin(x)$, pero este límite no existe ni como un límite finito, ni como $\pm\infty$.

- Las propiedades sobre límites (de la suma, producto, etc...) dadas al principio también son válidas cuando alguno o ambos de los límites l y m son infinitos, siempre que las expresiones que aparecen con los límites estén definidas o tengan sentido. Dichas expresiones y sus correspondientes valores son los siguientes. Se entienden en el siguiente sentido.
"$a^{+\infty} = +\infty$ para $a > 1$ quiere decir: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = \infty$ si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ y $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$".

<u>Operaciones</u>

$$\begin{aligned}
a + (+\infty) &= +\infty\,, & a + (-\infty) &= -\infty\,, \\
(+\infty) + (+\infty) &= +\infty\,, & -\infty - \infty &= -\infty\,, \\
(+\infty) \cdot (+\infty) &= +\infty\,, & -\infty \cdot (+\infty) &= -\infty\,, \\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0^{\pm}\,, & a \cdot (\pm\infty) &= \pm\infty\,, \;\text{ si }\; a > 0\,, \\
\frac{a}{\pm\infty} &= 0^{\mp}\,, & a \cdot (\pm\infty) &= \mp\infty\,, \;\text{ si }\; a < 0\,, \\
\frac{a}{0^{\pm}} &= \pm\infty\,, \;\text{ si }\; a > 0\,, & \frac{a}{0^{\pm}} &= \mp\infty\,, \;\text{ si }\; a < 0\,, \\
(+\infty)^{a} &= +\infty\,, \;\text{ si }\; a > 0\,, & (+\infty)^{a} &= 0\,, \;\text{ si }\; a < 0\,, \\
(+\infty)^{(} + \infty) &= +\infty\,, & (+\infty)^{-\infty} &= 0\,, \\
a^{+\infty} &= +\infty\,, \;\text{ si }\; a > 1\,, & a^{+\infty} &= 0\,, \;\text{ si }\; 0 \leq a < 1\,.
\end{aligned}$$

<u>Indeterminaciones</u>

- Existen expresiones cuyo valor no se puede determinar previamente, ya que el resultado puede ser distinto en cada caso. A estas expresiones las llamamos *indeterminaciones*, y las más importantes son las siguientes:

$$+\infty-\infty\,,\;\; \frac{\pm\infty}{+\infty}\,,\;\; \frac{\pm\infty}{-\infty}\,,\;\; \frac{0}{0}\,,\;\; 0\cdot\pm\infty\,,\;\; (+\infty)^0\,,\;\; 0^0\,,\;\; 1^{\infty}\,,\;\; 1^{-\infty}\,.$$

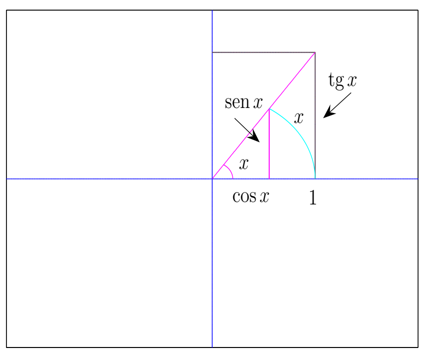
En general hay que deshacer estas indeterminaciones simplificando factores comunes, mediante alguna operación previa para identificar estos factores. Son útiles los dos resultados siguientes:

- Si $f(x)=g(x)$ para todo $0<|x-x_0|<\delta$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=l$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

- Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+3}{x-2}=6$.

Lema del sandwich: Si $g(x)\le f(x)\le h(x)$ para todo $0<|x-x_0|<\delta$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=l$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$.

- Ejemplo: $x>0\;\Rightarrow\;\operatorname{sen}x\le x\le \operatorname{tg}x\;\Rightarrow\;\cos x\le\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\le 1\;\Rightarrow\;\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.



Por simetría, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}=1$.

- **Límites relacionados con la exponencial.**

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=1$ y $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ es $+\infty$ o $-\infty$ entonces

$$\lim_{x\to\alpha}\big(f(x)\big)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)-1)g(x)}\,,$$

si existe el límite, donde α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ ó $-\infty$.

- Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-7}\right)^{x+5}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}(x+5)\,\frac{10}{2x-7}}=e^5$.

- **Comparación de infinitos.**

Teorema. Sean $b > 0$ y $a > 1$. Entonces
1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{x^b} = +\infty$;
2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^b}{\log x} = +\infty$;
3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{\log x} = +\infty$.
Además, se tiene para el límite en el origen por la derecha:
4) $\lim_{x \to 0^+} x^b \log x = 0$.

1.4 Continuidad

Primeras definiciones y propiedades

> *Continuidad:* Decimos que una función f es continua en un punto x_0 si existe el límite en ese punto y coincide con el valor de la función en él.
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ cuando $|x - x_0| < \delta$.

- Definición alternativa
$$\lim_{h \to 0} \Big(f(x_0 + h) - f(x_0) \Big) = 0.$$

- f es continua en un intervalo (a, b) si es continua en todos los puntos; se escribe $f \in \mathcal{C}(a, b)$.

- f es continua en un intervalo $[a, b]$ si es continua en (a, b), existen los límites laterales interiores en a y en b, y coinciden con los valores de f en esos puntos (continuidad por la derecha en a y continuidad por la izquierda en b):

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

- **Ejemplo de funciones continuas:**

- De acuerdo a los límites que se obtienen por sustitución directa, son continuas las funciones: polinomios, seno y coseno, raíz cuadrada (en $\{x \geq 0\}$), exponencial, logaritmo (en $\{x > 0\}$).

- **Propiedades**

- La suma de funciones continuas es continua; igual que el producto y el cociente (salvo que se anule el denominador).

- La composición de funciones continuas es continua: si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en x_0.

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = l$ y g es continua en l entonces $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(l)$. Aquí α puede ser x_0, x_0^+, x_0^-, ∞ o $-\infty$. Es decir,

$$\lim_{x\to\alpha} g(f(x)) = g(\lim_{x\to\alpha} f(x)).$$

- *Ejemplo:*

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}} = e.$$

Más en general:
- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$, donde $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\lim\limits_{y\to\ell} g(y) = m$ y además (en el caso de que ℓ sea finito) $f(x) \neq \ell$ para todo x perteneciente a un entorno perforado de α, entonces $\exists \lim\limits_{x\to\alpha} g\circ f(x) = m$.

- Si existe el límite de f en x_0 pero no coincide con el valor $f(x_0)$, o f no está definida allí, se dice que f *tiene una discontinuidad evitable* en ese punto. Se evita la discontinuidad definiendo correctamente el valor $f(x_0)$.

Ejemplo:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \qquad \text{tiene discontinuidad evitable en } x_0 = 0;$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad \text{es continua en } \mathbb{R}.$$

Resultados sobre continuidad.

Teorema de Bolzano: Si f es una función continua en $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de distinto signo, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

Teorema de los valores intermedios: Si f es una función continua en $[a, b]$ con, por ejemplo, $f(a) < f(b)$, entonces para todo $z \in (f(a), f(b))$ existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = z$. Se dice también: f toma todos los valores intermedios entre $f(a)$ y $f(b)$.

Teorema de acotación: Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces está acotada en $[a, b]$ y además alcanza el máximo y el mínimo en $[a, b]$. Es decir, existen puntos x_m, $x_M \in [a, b]$ tales que

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M) \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

Contraejemplos cuando no se cumplen todas las hipótesis:

$$f(x) = 1/x \quad \text{en } [-1, 1]; \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } (0, 1];$$

$$f(x) = x^2 \quad \text{en } [0, 1); \qquad f(x) = 1/x \quad \text{en } [1, \infty).$$

2.1 Derivabilidad

Primeras definiciones y propiedades

- *Velocidad media* en un intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$, si $u(t)$ es la posición:

$$v_m = \frac{u(t_0 + h) - u(t)}{h}.$$

- *Pendiente* del segmento que une dos puntos de la gráfica $y = f(x)$ de abscisas x_0 y $x_0 + h$:

$$m = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

La recta secante correspondiente es

$$y = f(x_0) + m(x - x_0).$$

> *Derivada:* Dada una función f, la derivada de f en un punto x_0 se define como el límite
> $$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

- *Ejemplo:* Si $f(x) = x^2$,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = 2x$$

- Se dice que f es derivable en x_0 si el límite anterior existe y es finito. Se dice que f es derivable en un intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$ si es derivable en todos sus puntos. La función f' existe para los puntos del dominio de f donde sea derivable.

- Notación alternativa

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0).$$

- Definición alternativa

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Si x_0 es un extremo de uno de los intervalos que componem $D(f)$, este límite se entiende como un límite lateral.

> *Teorema:* Si f es derivable en x_0 entonces es continua en x_0.

- Versión alternativa: Si f no es continua en un punto no puede ser derivable en ese punto.

Ejemplos: 1) La función $|x|$ es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en cualquier punto $x \neq 0$. No es derivable en $x = 0$.

2) La función x^a es continua en $[0, +\infty)$ para todo $a > 0$. Es derivable en $(0, +\infty)$ para toda constante a real. Para $a > 1$, es derivable en $[0, +\infty)$.

- **Recta tangente**

La recta tangente a la gráfica de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

- **Primeras derivadas**

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}) & \rightsquigarrow & f'(x) = nx^{n-1} \\
f(x) = \operatorname{sen} x & \rightsquigarrow & f'(x) = \cos x \\
f(x) = \cos x & \rightsquigarrow & f'(x) = -\operatorname{sen} x \\
f(x) = e^x & \rightsquigarrow & f'(x) = e^x \\
f(x) = \log x & \rightsquigarrow & f'(x) = 1/x
\end{array}$$

- **Propiedades**

- La derivada es una operación lineal: $(cf)' = cf'$, $(f + g)' = f' + g'$.

- Derivada de un producto: $(fg)' = f'g + fg'$.

- Derivada de un cociente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$.

- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$,

$$f'(x) = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

- Derivada de la composición, *regla de la cadena*: $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$.

- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{sen}(\log x)$,

$$f'(x) = \cos(\log x) \cdot \frac{1}{x}$$

- Derivada de la función inversa: $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

- *Idea:* Si $f \circ f^{-1}(x) = x$,

$$f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$$

- **Más derivadas**

$$\begin{array}{lcl}
f(x) = x^{\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R}) & \rightsquigarrow & f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \\
f(x) = a^{x} \quad (a > 0) & \rightsquigarrow & f'(x) = a^{x} \log a \\
f(x) = \log_a x \quad (a > 0) & \rightsquigarrow & f'(x) = \dfrac{1}{x \log a} \\
f(x) = \operatorname{arc\,tg} x & \rightsquigarrow & f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\
f(x) = \sec x & \rightsquigarrow & f'(x) = \sec x \operatorname{tg} x \\
f(x) = \log x & \rightsquigarrow & f'(x) = 1/x
\end{array}$$

- *Ejemplo:* Si $f(x) = a^x = e^{x \log a}$,

$$f'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

- *Ejemplo:* Si $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$,

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(\operatorname{arc\,sen} x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>*Resultados sobre derivabilidad.*</u>

- Si x_0 es un máximo o un mínimo (extremo) local de f y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.

- *Ejemplo de mínimo*: Si $f(x_0) \leq f(y)$ para todo $y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces, para $|h| < \delta$ se tiene

$$\begin{array}{ll}
\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0 & \text{si} \quad h > 0 \\
\dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0 & \text{si} \quad h < 0
\end{array}$$

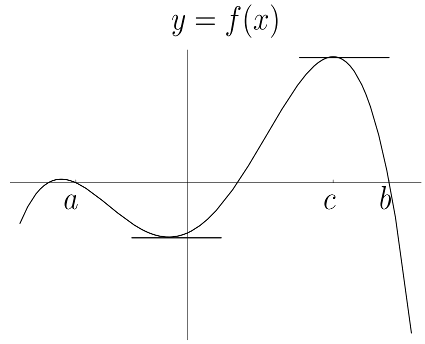
Por tanto el límite, como existe, debe ser cero.

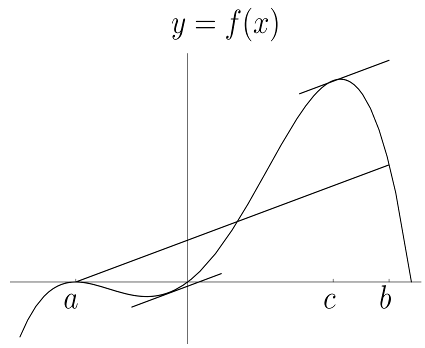
> *Teorema de Rolle:* Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Como f es continua en $[a, b]$, alcanza el máximo y el mínimo. Si los dos se alcanzan en a y en b, entonces f es constante. Si no, el máximo o el mínimo está en el interior y es un extremo local. La derivada allí debe ser cero.

> *Teorema del valor medio:* Si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que
> $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

La función $g(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ verifica las hipótesis del Teorema de Rolle.





- **Aplicaciones**

- Si f es continua en (a, b) y $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es constante en (a, b).

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b), es decir

$$f(x) < f(y) \quad \forall\, a < x < y < b.$$

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$ y $f(a) < 0 < f(b)$ entonces la ecuación $f(x) = 0$ tiene una y sólo una solución en ese intervalo.

- *Regla de L'Hôpital*

Teorema de L'Hôpital-Bernoulli: Si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = 0$ y el límite $\lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe (finito o infinito),
entonces

$$\lim_{x\to\alpha} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\alpha} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- La regla de L'Hôpital se aplica también si $\lim_{x\to\alpha} f(x) = \lim_{x\to\alpha} g(x) = \infty$, y también si $\alpha = a^{\pm}$ o $\alpha = \pm\infty$.

- *Ejemplos*

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \tfrac{1}{2}$.

2) Sea $a > 1$. Entonces $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{a^x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = (\text{l'H}) = \frac{a^x \log a}{1} = +\infty.$

Ejercicio: Deducir del último ejemplo la primera regla de la comparación de infinitos.

2.2 Extremos de funciones

- Resultados necesarios:

> Una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza el máximo y el mínimo.

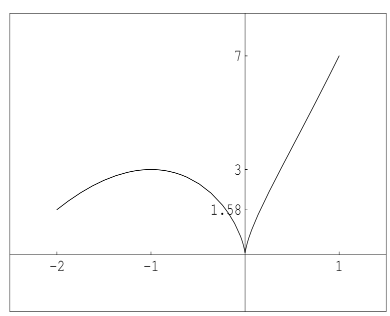
> En un punto de máximo o mínimo local de una función, si existe la derivada debe ser cero.

- Método de obtención de extremos: función continua en un intervalo cerrado y acotado

- considerar los puntos donde la derivada es nula;
- considerar los puntos donde no existe la derivada;
- considerar los extremos del intervalo;
- comparar el valor de la función en esos puntos.

- *Ejemplo:*

Sea $f(x) = 2x^{5/3} + 5x^{2/3}$ en $[-2, 1]$. Se tiene $f'(x) = \dfrac{10}{3}(x+1)x^{-1/3}$. Así, no existe $f'(0)$, mientras que $f'(-1) = 0$. Comparando los valores $f(0) = 0$, $f(-1) = 3$, $f(-2) = 2^{2/3}$, $f(1) = 7$, se tiene máximo en $x = 1$, mínimo en $x = 0$.



2.3 Estudio local. Propiedades de las gráficas de funciones

Crecimiento

- Si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces f es (estrictamente) creciente en (a, b).

- Análogamente para función decreciente.

- Si f es creciente en $(x_0 - \delta, x_0)$, decreciente en $(x_0, x_0 + \delta)$ y es continua en x_0, entonces f tiene un máximo local en x_0.

- Análogamente para un mínimo local.

- Para determinar los intervalos de crecimiento de una función, así como sus extremos locales, hay que determinar el signo de la derivada en los distintos intervalos.

<u>Convexidad</u>

- Se dice que un conjunto en $\mathbb{R}^2$ es convexo si dados dos puntos cualesquiera en el conjunto el segmento que los une está completamente contenido en él.

- Se dice que una función f es convexa en el intervalo $[a, b]$ si el conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, a \leq x \leq b,\, y \geq f(x)\}$ es convexo.
- Se dice que f es cóncava si $-f$ es convexa.

- Definiciones alternativas de función convexa.

- $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \forall\, a < x < b.$
- $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda) f(y) \quad \forall\, a < x,\, y < b, \quad 0 < \lambda < 1.$
- $f'(x) \leq f'(y) \qquad \forall\, a \leq x < y \leq b$ (si $\exists f'$ en $[a, b]$).
- $f''(x) \geq 0 \qquad \forall\, a < x < b$ (si $\exists f''$ en $[a, b]$).

Se dice que x_0 es un punto de inflexión de una función f si ésta cambia de convexidad a ambos lados del punto.

Si x_0 es un punto de inflexión de f y existe la segunda derivada allí, entonces $f''(x_0) = 0$.

- Para determinar los intervalos de convexidad de una función, así como sus puntos de inflexión, hay que determinar el signo de la segunda derivada en los distintos intervalos.

<u>Asíntotas</u>

- f tiene una asíntota vertical en $x = x_0$ si $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$.

- f tiene una asíntota horizontal $y = a$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$.

- f tiene una asíntota inclinada $y = mx + b$ si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - mx - b\Big) = 0$.

En la práctica, para las asíntotas inclinadas, $m = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \Big(f(x) - mx\Big)$.

2.4 Polinomio de Taylor

<u>Construcción</u>

Queremos aproximar una función, cerca de un punto dado, por un polinomio. La idea es imponer que el polinomio comparta con la función el valor de las sucesivas derivadas en ese punto.

Empecemos con $x_0 = 0$. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

el cálculo de sus derivadas en $x = 0$ es fácil

$$\frac{d^k P_n}{dx^k}(0) = k!\, a_k\,.$$

Para que coincidan estos valores con $\dfrac{d^k f}{dx^k}(0)$, basta tomar $a_k = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k f}{dx^k}(0) = \dfrac{f^{k)}(0)}{k!}$.

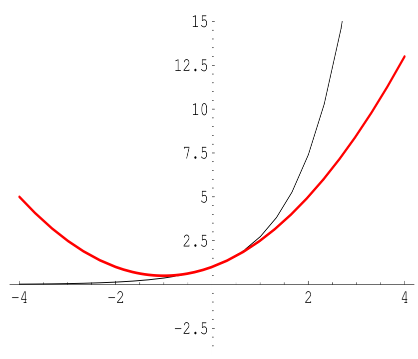
Así el polinomio de Taylor de orden n de f alrededor del punto $x = 0$, es

$$P_{n,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(0)}{k!} x^k$$

Tiene grado *menor o igual* que n; va a ser menor que n si $f^{(n)}(0) = 0$.

- *Ejemplo*
Sea $f(x) = e^x$. Como $f^{k)}(0) = 1$ para toDo $k \geq 0$, el polinomio de Taylor es

$$P_{n,0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$



$$f(x) = e^x, \quad P_{2,0,f}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}\,.$$

Tomemos ahora x_0 cualquiera. Si el polinomio de grado n se escribe como

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k \end{aligned}$$

el cálculo de sus derivadas en x_0 es fácil, $P_n^{k)}(x_0) = k!\, a_k$. Para que coincidan estos valores con $f^{k)}(x_0)$ basta tomar $a_k = \dfrac{f^{k)}(x_0)}{k!}$.

Definición: El polinomio de Taylor de orden n de f alrededor del punto $x = x_0$ es

$$P_{n,x_0,f}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Cuando $x_0 = 0$ se suele denominar también polinomio de McLaurin.

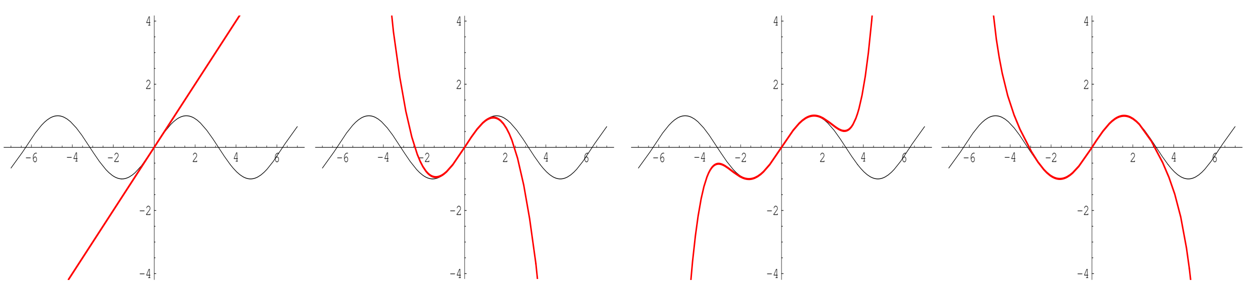
En los siguientes desarrollos tomamos $x_0 = 0$.

$$\begin{array}{lcl}
\operatorname{sen} x & \rightsquigarrow & x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x & \rightsquigarrow & 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \\
\dfrac{1}{1-x} & \rightsquigarrow & 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \\
\log(1+x) & \rightsquigarrow & x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n}
\end{array}$$

También, para $x_0 = 1$:

$$\log x \quad \rightsquigarrow \quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n}$$

- *Ejemplo:* $f(x) = \operatorname{sen} x$ comparado con sus polinomios de Taylor en el origen de grados 1, 3, 5 y 7.



Teorema de Taylor:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_{n,x_0,f}(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Es decir, el polinomio aproxima a la función cerca del punto considerado y esta aproximación es mejor cuanto mayor es el grado.

> *Definición (notación de Landau):* Se dice que $f(x) = o(g(x))$, y se lee "o pequeña de", para x cerca de x_0 si
>
> $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Se puede escribir el Teorema de Taylor, utilizando la notación de Landau:

$$f(x) = P_{n,x_0,f}(x) + o(|x - x_0|^n) \qquad \text{cuando } x \to x_0.$$

- *Ejemplos:*

$$\cos x - 1 = o(\operatorname{sen} x) \qquad \text{para } x \to 0$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{para } x \to 0$$

$$\log x = o(x) \qquad \text{para } x \to \infty.$$

<u>Cálculo de límites</u>

Para calcular límites usamos el Teorema de Taylor con el grado del polinomio conveniente.

- *Ejemplo:*

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^x + x}{x^2} &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - x^2/2 - (1 + x + x^2/2) + x + o(x^2)}{x^2} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2} = -1. \end{aligned}$$

<u>Resto de Taylor</u>

Según el Teorema de Taylor, el resto

$$R_{n,x_0,f}(x) = f(x) - P_{n,x_0} f(x),$$

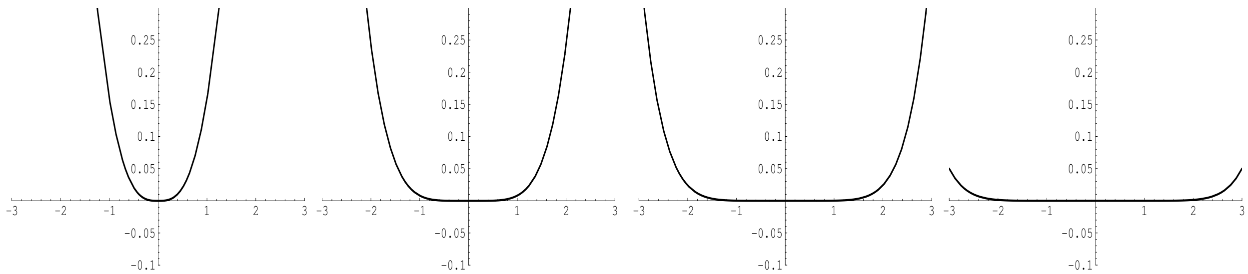
verifica que tiende a cero para $x \to x_0$, y lo hace más deprisa cuanto mayor es n.

En el ejemplo anterior de la función seno, podemos dibujar el valor absoluto del resto (el error) para los cuatro polinomios calculados:

Para estimarlo cuantitativamente utilizamos la fórmula de Lagrange

$$R_{n,x_0,f}(x) = \frac{f^{n+1)}(c)(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

para algún c entre x y x_0.



- *Ejemplo:* si $f(x) = \operatorname{sen} x$, para estimar $\operatorname{sen} 1$ mediante el polinomio de grado 5, utilizamos

$$|R_{5,0} f(1)| \leq \frac{1}{6!}$$

y obtenemos

$$\operatorname{sen} 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \varepsilon, \qquad |\varepsilon| \leq \frac{1}{720}$$

El valor obtenido es $\operatorname{sen} 1 \approx 0{,}8416$, con un error de 0,0014. El valor exacto con 6 cifras decimales es 0,841471.

Caracterización de extremos y puntos de inflexión

Utilizando el Teorema de Taylor, podemos caracterizar los puntos críticos según la primera derivada no nula.

Teorema: Supongamos que $f'(a) = f''(a) = \cdots = f^{k-1)}(a) = 0$, $f^{k)}(a) \neq 0$, $k \geq 1$. Entonces

- Si k es par y $f^{k)}(a) > 0$, el punto $x = a$ es un mínimo local.
- Si k es par y $f^{k)}(a) < 0$, el punto $x = a$ es un máximo local.
- Si k es impar, el punto $x = a$ es un punto de inflexión.

La idea es que cerca del punto $x = a$ se tiene

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f^{k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Si k es par, $(x-a)^k$ es positivo y $f(x)$ será mayor o menor que $f(a)$ según el signo de $f^{k)}(a)$. Si k es impar entonces el último término siempre cambia de signo a ambos lados de $x = a$.

4.1 Cálculo de primitivas

Preliminares

- Geométricamente, el problema de la derivación surge al buscar la pendiente de una curva y el problema de la integración aparece cuando se pretende calcular el área bajo una curva. Newton encontró, en el S.XVIII, que estos dos problemas están relacionados, y que de hecho son inversos. Veremos con el Teorema Fundamental del Cálculo que las integrales definidas se pueden obtener calculando una primitiva.

Definición: Se dice que una función g es una primitiva de f si $g' = f$.

Aunque en ese caso, si c es una constante cualquiera la función $g + c$ también es una primitiva de f, omitiremos las constantes aditivas y escribiremos

$$\int f = g, \qquad \text{o también} \qquad \int f(x)\,dx = g(x).$$

Técnicas de integración

- *Integrales inmediatas:*

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1 \qquad\qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| \qquad\qquad \int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} \qquad\qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x \qquad\qquad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{a}\right)$$

-*Integración por cambio de variable*

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(x)\,dx$$

(y después deshacer el cambio.)

- *Integración por partes*

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$

o lo que es lo mismo, poniendo $u = f(x)$, $v = g(x)$:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

-*Integración de funciones racionales: descomposición en fracciones simples*

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx \ \text{ con } P,\ Q \text{ polinomios.}$$

1. Si grado$(P) \geq$ grado$(Q) \rightsquigarrow$ dividimos.

   $P(x) = Q(x)C(x) + R(x) \rightarrow$

   $$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int C(x) + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx.$$

2. $\displaystyle\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$ con grado$(R) <$ grado(Q). Descomponemos el denominador en producto de factores simples.

   $$Q(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\cdots((x-r_1)^2+s_1^2)^{m_1}((x-r_2)^2+s_2^2)^{m_2}\cdots$$

   Un factor por cada raíz real, contando su multiplicidad, y un factor por cada par de raíces complejas conjugadas, también con su multiplicidad.

3. Descomponemos el cociente en suma de fracciones simples.

Factor en el denominador	Términos en la descomposición
$x-\alpha$	$\dfrac{A}{x-\alpha}$
$(x-\alpha)^k$	$\dfrac{A_1}{x-\alpha} + \dfrac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \cdots \dfrac{A_k}{(x-\alpha)^k}$
$(x-r)^2+s^2$	$\dfrac{Cx+D}{(x-r)^2+r^2}$
$\big((x-r)^2+s^2\big)^m$	$\dfrac{C_1x+D_1}{(x-r)^2+s^2} + \dfrac{C_2x+D_2}{\big((x-r)^2+s^2\big)^2} + \cdots + \dfrac{C_mx+D_m}{\big((x-r)^2+s^2\big)^m}$

   Por cada factor del denominador $Q(x)$, añadimos el correspondiente término de la tabla y calculamos las constantes A_i, B_i, C_i, D_i igualando los denominadores.

4. Integramos. Los términos correspondientes a raíces reales se integran de manera inmediata. Los correspondientes a raíces complejas requerirán un cambio trigonométrico, $x-r = s\,\mathrm{tg}\,t$.

-*Integrales trigonométricas*

$\displaystyle\int \mathrm{sen}^{2n} x\,dx, \int \cos^{2n} x\,dx \rightsquigarrow$ fórmulas del ángulo doble: $\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2 x$

$$\int \operatorname{sen}^{2n+1} x\,dx = \int \operatorname{sen}^{2n} x \operatorname{sen} x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^n \operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int \cos^{2n+1} x\,dx = \int \cos^{2n} x \cos x\,dx = \int (1-\operatorname{sen}^2 x)^n \cos x\,dx$$

$$\int \operatorname{sen} mx \cos nx\,dx \rightsquigarrow \text{fórmulas del seno y coseno de la suma}$$

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)\,dx \rightsquigarrow \begin{array}{ll} R \text{ impar en } \operatorname{sen} x \to & t = \cos x \\ R \text{ impar en } \cos x \to & t = \operatorname{sen} x \\ R \text{ par en } \operatorname{sen} x \text{ y } \cos x \to & t = \operatorname{tg} x. \end{array}$$

-*Cambios de variables trigonométricos*

1. $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \to x = a \operatorname{sen} t$
2. $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \to x = a \sec t$
3. $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) \to x = a \operatorname{tg} t$

4.2 Teorema Fundamental del Cálculo

Preliminares

- Si $f(x)$ es una función continua positiva en el intervalo $x \in [a, b]$, entonces la **integral definida**

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx$$

representa el **area bajo la gráfica** de la función $f(x)$, sobre el eje X, en el intervalo $[a, b]$.

- Por una función integrable en un intervalo finito $[a, b]$, vamos a entender una función f, que está acotada en $[a, b]$ y tiene solo una cantidad finita de puntos de discontinuidad en $[a, b]$.

Definición: Dada una función integrable $f(x)$ en $[a, b]$, dividimos el intervalo en n subintervalos iguales y definimos la integral de Riemann de $f(x)$ entre a y b como

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\Big(a + j\,\frac{b-a}{n}\Big).$$

- *Propiedades de la integral:*

1. $\displaystyle\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g$
2. $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. $\displaystyle\int_a^a f = 0$
4. $\displaystyle\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$
5. $\displaystyle f \geq g \Longrightarrow \int_a^b f \geq \int_a^b g$
6. $\displaystyle f \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f \geq 0;$
   si $\displaystyle f \leq 0 \Longrightarrow \int_a^b f \leq 0$
7. $\displaystyle \Big| \int_a^b f \Big| \leq \int_a^b |f|$
8. $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in [a,b] \Longrightarrow$
   $\displaystyle m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M(b-a)$

- *Valor medio:* Se denomina valor medio de una función f en el intervalo $[a,b]$ al número

$$VM(f) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

Claramente, si $m \leq f \leq M$ en $[a,b]$, se tiene $m \leq VM(f) \leq M$.

Función integral

Sea f integrable en [a,b], y consideremos la función

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

en $[a,b]$. Entonces F es continua en $[a,b]$.

Teorema Fundamental del Cálculo
Si f es continua en $c \in [a,b]$, entonces F es diferenciable en c con

$$F'(c) = f(c).$$

- *Regla de Barrow:*

Si $g'(x) = f(x)$, $\forall x \in (a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a).$$

En vista de esta regla, si $a < b$, definimos $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$. Siguen siendo válidas las propiedades:

- $\displaystyle\int_a^b c_1 f + c_2 g = c_1 \int_a^b f + c_2 \int_a^b g;$

- $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, si $D(f)$ es un intervalo (finito o infinito) y $a, b, c \in D(f)$.

-*Cambio de variables en la integral definida*

$$\int_a^b f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

- *TFC generalizado:*

Supongamos que las funciones involucradas son derivables.

- Sea $H(x) = F(g(x)) = \displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)\,dt$, entonces
$$H'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

- Sea $H(x) = \displaystyle\int_{l(x)}^{g(x)} f(t)\,dt$, entonces
$$H'(x) = f(g(x))g'(x) - f(l(x))l'(x).$$

4.3 Integrales impropias

Definición: *La integral impropia en el límite b* ($b \in \mathbb{R}$) se define como

$$\int_a^{\to b} f(x)\,dx := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

La integral impropia en el límite a ($a \in \mathbb{R}$) se define como

$$\int_{a\leftarrow}^{b} f(x)\,dx := \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(x)\,dx.$$

Se dice que estas integrales *convergen* si existen y son finitos los límites que los definen.
Si uno de los límites de integración es $\pm\infty$, en este límite la integral siempre se entiende como impropia. Es decir, si a, b son finitos, ponemos

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,dx;$$
$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx := \lim_{c \to -\infty} \int_c^b f(x)\,dx;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{c \to -\infty} \lim_{d \to +\infty} \int_c^d f(x)\,dx.$$

En general, la integral $\int_a^b$, impropia tanto en a como en b, se define como

$$\int_{a\leftarrow}^{\to b} f(x)\,dx := \lim_{c \to a^+} \lim_{d \to b^-} \int_c^d f(x)\,dx.$$

(aquí a, b pueden ser finitos o infinitos). Para cualquier $p \in (a, b)$, podemos descomponer

$$\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx = \int_{a\leftarrow}^{p} f(x)\,dx + \int_{p}^{\rightarrow b} f(x)\,dx.$$

Se dice que la integral $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ *converge en* a si converge $\int_{a\leftarrow}^{p} f(x)\,dx$, y *converge en* b si converge $\int_{p}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ (estas nociones no dependen de la elección del punto medio p).

Ejemplos:

1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{c\to-\infty}\lim_{d\to+\infty}\int_c^d \frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$= \lim_{c\to-\infty}\lim_{d\to+\infty} \arctan x\Big|_{x=c}^{x=d} = \arctan x\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

2) $$\int_1^{+\infty} x^a\,dx = \lim_{d\to+\infty}\int_1^d x^a\,dx$$
$$= (\text{para } a \neq -1) \quad = \lim_{d\to+\infty} \frac{x^{a+1}}{a+1}\Big|_{x=1}^{x=d} = -\frac{1}{a+1} + \lim_{d\to+\infty}\frac{d^{a+1}}{a+1}.$$

Tenemos que considerar diferentes casos.

a) $a > -1$. Entonces $a + 1 > 0$, y el último límite es igual a $+\infty$.

b) $a = -1$. En este caso, la primitiva de x^a es $\log x$, y tenemos que modificar el cálculo anterior, obteniendo que la integral impropia diverge:

$$\int_1^{+\infty} x^a\,dx == \lim_{d\to+\infty}\frac{\log}{x}\Big|_{x=1}^{x=d} = \lim_{d\to+\infty}\log d = +\infty.$$

c) $a < -1$. Entonces $a+1 < 0$, luego $\lim\limits_{d\to+\infty}\dfrac{d^{a+1}}{a+1} = 0$, con lo cual la integral impropia converge:

$$\int_1^{+\infty} x^a\,dx = \frac{1}{-a-1} > 0.$$

3) Ahora consideremos la integral impropia en 0 de la misma función:

$$\int_{0\leftarrow}^{1} x^a\,dx = \lim_{c\to0^+}\int_0^1 x^a\,dx.$$

Utilizando cálculos parecidos a los anteriores, obtenemos que

$$\int_{0\leftarrow}^{1} x^a\,dx \text{ converge } \iff a > -1; \qquad \int_1^{+\infty} x^a\,dx \text{ converge } \iff a < -1. \tag{3}$$

De la misma forma, si $x_0 < x_1 < +\infty$, entonces $\int_{x_0\leftarrow}^{x_1}(x-x_0)^a\,dx$ converge si y solo si $a > -1$.

Criterio de convergencia absoluta de una integral impropia:
Supongamos que $-\infty \leq a < b \leq +\infty$. Sean f, g funciones acotadas en cada subintervalo cerrado y finito del intervalo (a, b), que tienen en (a, b) solo una cantidad finita de discontinuidades.
Si $|f(x)| \leq g(x)$ en (a, b) y la integral impropia $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} g(x)\,dx$ converge, entonces converge la integral impropia $\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx$ y, además,

$$\left|\int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} f(x)\,dx\right| \leq \int_{a\leftarrow}^{\rightarrow b} g(x)\,dx.$$

Ejemplos: Aplicando (3) y el Criterio de convergencia absoluta de las integrales impropias, se puede demostrar la convergencia de muchas integrales impropias:

1) $\int_{0\leftarrow}^{1} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\, dx$ converge, porque

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{x}{x^{3/2}} = x^a,$$

con $a = -1/2 > -1$;

2) $\int_{1}^{\infty} \dfrac{\operatorname{sen} \log x}{x^{3/2}}\, dx$ converge, porque

$$\left|\frac{\operatorname{sen} \log x}{x^{3/2}}\right| \leq \frac{1}{x^{3/2}} = x^a,$$

con $a = -3/2 < -1$.

4.4 Aplicaciones de la integral

Áreas

- Área entre la gráfica $y = f(x)$ y el eje horizontal, para x en el intervalo $[a, b]$,

$$A = \int_a^b |f(x)|\, dx$$

- Área entre las gráficas de dos funciones, $y = f(x)$ e $y = g(x)$, para x en el intervalo $[a, b]$,

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

- Área usando *ecuaciones paramétricas*: área entre la gráfica $\{x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_0, t_1]\}$ y el eje horizontal,

$$A = \left| \int_{t_0}^{t_1} y(t)x'(t)\, dt \right|$$

- Área usando *coordenadas polares:* área entre la gráfica $\{r = r(\theta),\, \theta \in [\alpha, \beta]\}$ y el eje horizontal,

$$A = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r^2(\theta)\, d\theta$$

Volúmenes

- Volumen por secciones: si $A(x)$ es el área de la sección para cada $x \in [a, b]$,

$$V = \int_a^b A(x)\, dx$$

- Volumen por el método de discos: volumen del sólido obtenido al girar la región entre la gráfica $y = f(x)$ y el eje horizontal, alrededor de éste, para $x \in [a, b]$,

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

- Volumen por el método de capas: volumen del sólido obtenido al girar la región entre la gráfica $y = f(x)$ y el eje horizontal, alrededor del eje vertical, para $x \in [a, b]$,

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx$$

Longitudes

- Longitud del arco de curva $y = f(x)$ para $x \in [a, b]$,

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

- Longitud usando *ecuaciones paramétricas*: longitud del arco de curva $\{x = x(t),\ y = y(t),\, t \in [t_0, t_1]\}$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

- Longitud usando *coordenadas polares:* longitud del arco de la curva $\{r = r(\theta),\, \theta \in [\alpha, \beta]\}$

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\, d\theta$$

–$\mathcal{A}_\delta$P–