1) Evalúa las integrales dobles siguientes, donde R es la región acotada por las ecuaciones que se dan en cada caso (habrá que elegir el orden de integración más conveniente):

(a) $\iint_R x^3y^2\,dA$; $\quad y=x,\ y=0,\ x=1$

(b) $\iint_R (2x+4y+1)\,dA$; $\quad y=x^2,\ y=x^3$

(c) $\iint_R 2xy\,dA$; $\quad y=x^3,\ y=8,\ x=0$

(d) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dA$; $\ x=0,\ x=1,\ y=-3,\ y=3$.

2) Invierte el orden de integración en las integrales iteradas siguientes:

(a) $\int_0^2\int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$ (b) $\int_0^3\int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$.

3) Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

(a) Bajo el paraboloide $z=x^2+y^2$ y sobre la región delimitada por $y=x^2$ y $x=y^2$.

(b) Delimitado por el paraboloide $z=x^2+y^2+4$ y los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y=1$.

4) Dibuja la región tridimensional de integración correspondiente a la siguiente integral triple:

$$\int_0^6\int_0^{4-2x/3}\int_0^{3-x/2-3y/4} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

5) Expresa la integral del ejercicio anterior como integral iterada en el orden $dy\,dx\,dz$.

6) Calcula $\int_0^1\int_0^1\int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy$.

7) Halla el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración:

(a) $\iiint_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q=[1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(b) $\iiint_T x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=\pi$, $x+y=1$.

(c) $\iiint_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z=x\,y$ y los planos $y=x$, $x=1$ y $z=0$.

(d) $\iiint_\Omega x\,y\,\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $y=x^2$ y los planos $y=z$, $y=1$ y $z=0$.

8) En cada uno de los siguientes casos, la integral triple $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibuja la región de integración $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z=0$. Escribe entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que la integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\int_0^1\left(\int_0^x\left(\int_0^y f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$.

(b) $\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$.

(c) $\int_0^1\left(\int_0^1\left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$.

9) Halla la masa y el centro de masas de:

(a) La lámina $[0,2]\times[-1,1]$ con densidad $\rho(x,y)=xy^2$.

(b) La lámina, con densidad $\rho(x,y)=3$, delimitada por la parábola $x=y^2$ y la recta $y=x-2$.

(c) El sólido, con densidad $\rho(x,y,z)=2$, bajo el plano $z=1+x+y$ y sobre la región del plano xy delimitada por las curvas $y=\sqrt{x}$, $y=0$ y $x=1$.

(d) El cubo $[0,a]\times[0,a]\times[0,a]$ con densidad $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

10) La densidad de carga eléctrica sobre el rectángulo $[1,3]\times[0,2]$ viene dada por la función $\sigma(x,y) = 2xy + y^2$ (medida en culombios por metro cuadrado). Halla la carga total de tal placa rectangular.

11) Calcula el valor medio de:

(a) La función $f(x,y,z) = xyz$ sobre el cubo de lado L situado en el primer octante, con lados paralelos a los ejes coordenados, y con un vértice en el origen.

(b) La función $f(x,y,z) = yz\cos(x^5)$ sobre el sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ x \leq z \leq 2x\}$.

Nota. Con frecuencia, ciertas integrales se calculan mucho más fácilmente mediante un cambio de variables. Hay tres cambios de variables bastante recurrentes: se trata de los cambios a coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. Las coordenadas polares se usan cuando tenemos una integral doble y el recinto de integración tiene simetría circular. Los cambios a coordenadas cilíndricas o esféricas se usan para calcular integrales triples sobre regiones con simetrías cilíndricas o esféricas, respectivamente.

Se trata de los siguientes cambios:

1. Polares: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $dA = r\,dr\,d\theta$ (¡no olvidarse de la r al sustituir dA!).
2. Cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $dA = r\,dz\,dr\,d\theta$ (es como las polares, dejando sin tocar la z).
3. Esféricas: $x = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\varphi$, $dA = r^2\operatorname{sen}\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi$.

En todos los casos, en la correspondiente integral iterada, hay que adaptar convenientemente los límites de integración a las nuevas variables. Por ejemplo, si integramos $f(x,y)$ sobre la región R del semiplano superior (es decir, $y \geq 0$) delimitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (es decir, una semicorona circular de radios 1 y 2), entonces, pasando a polares, tendríamos que calcular

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_0^\pi \int_1^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Los siguientes ejercicios se resuelven usando alguno de estos tres cambios de variables.

12) Usa coordenadas polares para evaluar las integrales siguientes:

(a) $\iint_R e^{x^2+y^2}\,dA$, con R la corona circular de radio entre 1 y 2.

(b) $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2}\,dy\,dx$.

13) Calcula $\iiint_R ze^{x^2+y^2}\,dV$ donde R es el cilindro de base circular de radio 2 centrada en el origen y altura $0 \leq z \leq 5$.

14) Determina y dibuja el recinto de integración y halla el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas:

(a) $\iiint_\Omega (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por el paraboloide $x^2+y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\iint_\Omega dx\,dy\,dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2+y^2$ y $x+y = 1$.

(c) $\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω un cono recto de revolución, de altura h, base de radio $a > 0$ situado en el plano $z = 0$ y eje en el eje z.

15) Utiliza coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales triples. Dibuja el recinto de integración en cada caso.

(a) $\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\iiint_C x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$, con $C = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ x,y,z \geq 0\right\}$.

(c) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.