1) Aplicando los polinomios de Taylor, calcula los límites

$$\text{(a)}\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5t^2)-\cos(4t^2)}{(\sin t)^4}; \qquad\qquad \text{(b)}\quad \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t)+\log(1-t)+t^2}{t^2(1-\cos t)}.$$

En (a), utilizar la siguiente propiedad: si $g(x) = o(x^n)$ cuando $x \to 0$ y k es un entero positivo, entonces $g(x^k) = o(x^{nk})$, $x \to 0$. Es un caso muy particular de la propiedad vista en clase.

Ejercicios adicionales sobre funciones de más de dos variables

2) Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones de tres variables. Halla sus extremos.
(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x>0, y>0, z>0)$.

3) Halla los extremos de $f(x,y,z)$ sujetos a las restricciones indicadas:
(a) $f(x,y,z) = xyz$, con la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$,
(b) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$, con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4) Demuestra que para todos los valores no negativos de x, y, z tales que $x + y + z = 1$, se tiene

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}.$$

Indicación: Si pasamos a las variables x, y, sustituyendo $z(x,y) = 1 - x - y$, ¿qué valores pueden tomar estas dos variables? Buscar el máximo de la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xyz}$ sobre este subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Comprueba primero que el máximo se alcanza.

5) Utiliza el resultado del ejercicio anterior para demostrar la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}, \qquad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Indicación: Aplica la desigualdad del ejercicio anterior a los números $x/t, y/t, z/t$, eligiendo $t > 0$ de forma adecuada.

6) ¿Cómo se debe dividir un segmento de longitud L en cuatro partes de modo que el producto de sus longitudes sea máximo?

7) Encuentra el valor máximo de la función $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ en la curva intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

La matriz jacobiana

8) Halla la matriz jacobiana de f en a (es decir $Df(a)$) en cada uno de los siguientes casos:
(a) $f(x,y) = (y, x, xy, y^2 - x^2)$, $a = (1,2)$.
(b) $f(x,y) = (\operatorname{sen}(x+y), \cos(x-y))$, $a = (\pi, -\pi/4)$.
(c) $f(x,y,z,t) = \left(\sqrt{y^2+z^2}, \sqrt{x^2+z^2}, x^2+y^2+z^2-9t^2\right)$, $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 3\right)$.

9) (Este ejercicio es relevante en el tema del paso a coordenadas polares en integrales dobles.) Sea $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función, definida por

$$V(r,\theta) = \big(x(r,\theta), y(r,\theta)\big),$$

$$\begin{cases} x(r,\theta) &= r\cos\theta, \\ y(r,\theta) &= r\sin\theta. \end{cases}$$

(a) Decidir si V es inyectiva. Demostrar que es sobreyectiva.
(b) ¿Es inyectiva la restricción de V al conjunto $\{(r,\theta) : \quad r>0,\ 0<\theta<2\pi\}$?
(c) Calcular la matriz jacobiana 2×2

$$DV(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} := \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}.$$

(d) Encontrar una simple expresión para el determinante $\det V(r,\theta) = \det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ (que se denomina *el determinante jacobiano* del cambio V).

10) La matriz jacobiana y el determinante jacobiano del cambio a coordenadas esféricas. Se utiliza en integrales triples con cierta simetría esférica.
Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ a (ρ,φ,θ), con $\rho\geq 0$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$ y $0\leq\theta\leq\pi$, mediante las fórmulas:

$$x = \rho\cos\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad y = \rho\ \mathrm{sen}\,\varphi\ \mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad z = \rho\cos\theta\,.$$

Halla la matriz jacobiana $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}$. Halla una expresión simple para su determinante.

11) Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$. Aplica la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

12) Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{x\,y}\,\cos x\,y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \mathrm{sen}\,t.$$

13) La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcula la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\mathrm{sen}\,t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.