1) Sea $f(x) = \frac{x-3}{x-5}$. Encontrar el dominio $\mathcal{D}(f)$ y la imagen $\mathrm{Imag}(f)$. Demostrar que f es una función biyectiva de $\mathcal{D}(f)$ a $\mathrm{Imag}(f)$. ¿Cuáles son el dominio y la imagen de la función inversa f^{-1}? Calcular la función inversa.

2) Recordamos que el seno hiperbólico se define como $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Utilizando el teorema de valores intermedios, demostrar que es una función biyectiva de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Expresar la función inversa.

3) Utilizando la expresión de la altura de un triángulo, demostrar *el teorema de senos*: sean α, β, γ los ángulos de un triángulo opuestos, respectivamente, a sus lados A, B, C. Entonces

$$\frac{A}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{B}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{C}{\operatorname{sen}\gamma}\,.$$

La noción del límite

4) Sea $f(x)$ una función constante: $f(x) = L$ para todo $x \in \mathbb{R}$, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Demostrar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

5) Si f está acotada en un entorno de x_0 y $g(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces $f(x)g(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$. Demostrarlo.

6) Demostrar que si $f(x) \to 0$ y $g(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$, entonces $f(x) + g(x) \to 0$ cuando $x \to x_0$.

7) Sean A, ℓ unas constantes reales. Demostrar que $f(x) \to \ell$ cuando $x \to x_0$ si y solo si $f(x) + A \to \ell + A$ cuando $x \to x_0$.

8) Sean c, ℓ unas constante reales. Supongamos que $f(x) \to \ell$ cuando $x \to x_0$. Demostrar que $cf(x) \to c\ell$ cuando $x \to x_0$.

9) Para cada una de las expresiones

$$+\infty - (+\infty),\ \ \frac{\pm\infty}{\pm\infty},\ \ \frac{0}{0},\ \ 0\cdot(\pm\infty),\ \ (+\infty)^0,\ \ 0^0,\ \ 1^{+\infty},\ \ 1^{-\infty},$$

demostrar que es una indeterminación, considerando casos concretos. Por ejemplo, para el caso de la expresión $\frac{0}{0}$, dar un ejemplo de funciones f_1, f_2, g_1, g_2, todas ellas tendiendo a 0 cuando x tiende a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$, de forma que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \neq \lim_{x\to x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

10) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que f' existe en todo punto y es continua. Se conoce que

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad \text{y } f(1) = 0.$$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se verifica(n) siempre?

(i) Existe un $a \in [-1, 1]$ tal que $f'(a) = -2$;
(ii) Existe un $b \in [-1, 1]$ tal que $f'(b) = -1$;
(iii) Existe un $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = -3$.

Polinomios de Taylor

11) Calcula el polinomio de Taylor de órdenes 1, 2 y 3 de la función $f(x) = \ln(1+x)$ respecto del punto $x_0 = 0$. Evalúa dichos polinomios en $x = 0.01$, y compara con $f(0.01)$.

12) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = \sin(x)$ respecto del punto $x_0 = 0$? ¿Y respecto de $x_0 = \pi/2$?

13) Halla el valor de a y b para que los coeficientes de los términos de grado 1 y 3 del polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = x\cos(ax) - be^x$ se anulen.

14) Hallar el polinomio de Taylor de grado 4 de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \cos x$ en $a = \frac{\pi}{4}$ (b) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ en $a = 1$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ en $a = 0$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ en $a = 0$ (e) $f(x) = \arctan x$ en $a = 0$ (f) $f(x) = x^5$ en $a = 3$

(g) $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x^2}$ en $a = 0$ (h) $f(x) = \cos x$ en $a = \pi/4$ (i) $f(x) = \log(1+x)$ en $a = 0$