1) Clasifica las siguientes funciones, diciendo si son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas o de ninguna de estas clases.

(a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$
(b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-x$
(c) $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $f(n)=n+1$
(d) $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$, $f(n)=n+1$
(e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{sen} x$
(f) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2^{-x}$
(g) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2\cos^2 x-3\cos x-1$
(h) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x-1|$

2) (a) Encontrar una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, que sea sobreyectiva y no sea inyectiva.
(b) Encontrar una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, que sea inyectiva y no sea sobreyectiva.
(c) Sea n un número natural y sea $f:\{1,2,\dots,n\}\to\{1,2,\dots,n\}$. Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si f es inyectiva.
(d) Calcular el número de funciones biyectivas del conjunto $\{1,2,\dots,n\}$ sobre este mismo conjunto. Considerar primero los casos de $n=1,2,3$.

3) Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{x-\sqrt{1-x^2}}$, (b) $f(x)=\dfrac{1}{1-\ln x}$, (c) $f(x)=\ln(x-x^2)$, (d) $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$,

(e) $f(x)=\sqrt{3x^2-2x+1}$, (f) $f(x)=e^{\frac{1}{x^2}}$, (g) $f(x)=\dfrac{3-x}{\operatorname{sen} x}$ (h) $f(x)=(\operatorname{sen} x+\cos x)^x$.

4) La gráfica de una función $f(x)=2x^2-bx+1$ contiene el punto de coordenadas $(1,7)$. Halla el valor de b.

5) Esboza la gráfica de una función con dominio $(-\infty,-2)\cup[0,\infty)$ que sea decreciente en $(-\infty,-2)$, convexa en $(-4,-2)$, tenga un punto de inflexión en $x=-4$, un máximo absoluto en $x=1$ y un mínimo relativo en $x=4$.

6) Sean $f(x)=3x-9$ y $g(x)=\frac{5}{x-3}$.
(a) Hallar $g\circ f$ y $f\circ g$.
(b) Observar que $(g\circ f)(4)$ no está definido y explicar por qué. Hacer lo mismo con $(f\circ g)(3)$.
(c) Hallar el dominio de $g\circ f$ y de $f\circ g$.

7) Para cada apartado, decide si existe la función inversa de f y, en caso afirmativo, calcula esa función e indica su dominio de definición.

(a) $f(x)=\tan^2(x)$, $\mathrm{Dom}(f)=\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.
(b) $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, $\mathrm{Dom}(f)=\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$.
(c) $f(x)=x-x^2$, $\mathrm{Dom}(f)=(-\infty,-1)$.
(d) $f(x)=\tan^2(x)$, $\mathrm{Dom}(f)=\left(-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right)$.

8) Calcula los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\cos\pi x}{x^2-4+\log(x)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2}{x-1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+2x+5}{2x^3-2x^2+x+3}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{3x^3+2x}$,

(e) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}}$.

9) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1}$, (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$, (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, (k) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4}$, (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, (q) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$, (r) $\lim\limits_{x\to 0} e^{(-1/x^2)}$,

(s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x^{10}+48}$, (t) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^{18}+1}}$ (u) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2 x}{\sqrt{x+3}}$.

10) Encontrar un ejemplo de funciones f, g, definidas en $\mathbb{R}$, tales que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$

y para las que, sin embargo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)$ no existe.
Indicación: Piensa primero en una función h que no tenga límite cuando $x\to+\infty$, y encuentra f y g en las condiciones anteriores de modo que $f+g=h$.

11) Estudia el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:
(a) $f(x)=\frac{5x-10}{x^2-2x}$, (b) $f(x)=\frac{x+1}{x}$, (c) $f(x)=\ln|x|$, (d) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$,

(e) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, (f) $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin(\pi x)}$, (g) $f(x)=\frac{x^4-4}{x^2+4x+4}$, (h) $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

12) Calcula qué valor debe tener c para que la función $f(x)=\begin{cases} \arctan x, & \text{para } x\leq 1 \\ \ln x + c, & \text{para } x>1 \end{cases}$
sea continua, y dibuja la gráfica de f para ese valor.

Derivadas e integración de funciones reales de una variable real

13) Se considera la función $f(x)=x^3-3\,x^2-9\,x+1$ en el intervalo cerrado $[-2,6]$. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que alcanza f en dicho intervalo? Responde a la misma pregunta para las funciones $g(x)=x^4+3x^2$ y $h(x)=e^x$.

14) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:
(a) $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, (b) $y=\mathrm{sen}(\ln x)$, (c) $y=\ln(x^2\,\ln^3 x)$,
(d) $y=2^x$ (Ayuda: usar $a^b=e^{b\ln a}$), (e) $y=x^x$, (f) $y=\mathrm{sen}^4 x-3x^4\tan^2 x$,
(g) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, (h) $y=\frac{3x+\sqrt[3]{7x^2+1}}{e^{x^2}}$, (i) $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

15) Demuestra que la ecuación $6\,x^5+13\,x+1=0$ tiene exactamente una raíz real.

16) Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la llamada *función logística*:

$$y = f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \qquad \text{para } t > 0 \qquad (a,\ k,\ \text{y } b \text{ son constantes positivas}).$$

a) Representa la función $y = \frac{100}{1+2e^{-t}}$, para $0 < t < 5$.

b) Halla el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.

c) ¿A qué tamaño tiende la población?

17) En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad v de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k + s}, \qquad \text{para } s > 0, \qquad a \text{ y } k \text{ son constantes positivas,}$$

donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten*.

a) Representa gráficamente la función en el intervalo $0 < s < 3k$.

b) Halla el límite cuando $s \to \infty$ de la velocidad de conversión y calcula cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de este valor.

18) Estudia y representa gráficamente las funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, (b) $f(x) = |\ln x|$, (c) $f(x) = \ln |x|$, (d) $f(x) = |\cos x|$,

(e) $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, & \text{si } x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, (f) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, (h) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } |x-1| \leq 1 \\ 1 & \text{si } |x-1| > 1. \end{cases}$

19) La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \leq t < \infty, \quad (t \text{ representa el tiempo en semanas}).$$

a) Haz un esbozo suficientemente detallado de la gráfica de f.

b) Halla los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima.

c) ¿En qué instante la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima?

20) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que f' existe en todo punto y es continua. Se conoce que

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad \text{y } f(1) = 0.$$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se verifica(n) siempre?

(i) Existe un $a \in [-1, 1]$ tal que $f'(a) = -2$;
(ii) Existe un $b \in [-1, 1]$ tal que $f'(b) = -1$;
(iii) Existe un $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = -3$.

21) Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia* y *paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número N de individuos en un mililitro de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado aproximadamente por la función:

$$N(t) = 50(6t + 1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

a) ¿Cuál es el número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio?

b) Calcula el número máximo de individuos e indica justificadamente cuándo se alcanza.

c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

22) Una fábrica de bollería industrial determina, tras un estudio, que si y es el nivel de glucosa en sangre de un adulto normal (medido en miligramos por centímetro cúbico), la función $y = f(t) = 7+4te^{-\sqrt{t}}$ describe aproximadamente la evolución de dicho nivel de glucosa para tiempo $t > 0$ (medido en cuartos de hora) después de la ingesta de un bollo en el instante $t = 0$.
a) ¿Cuál era el nivel de glucosa inicial?
b) ¿En qué instante el nivel de glucosa en sangre alcanzará un máximo?
c) ¿Qué valor máximo de concentración de glucosa llegará a alcanzarse?
d) Una empresa farmacéutica está interesada en conocer también en qué instante el ritmo al que el organismo hace bajar el nivel de glucosa de la sangre es lo más veloz posible. ¿Cuál es este instante?
e) ¿Qué ocurre, según este modelo, con la concentración de glucosa en sangre si se deja pasar una cantidad muy grande de tiempo?
f) Dibuja del modo más preciso que te sea posible la gráfica de la función $y = f(t) = 7 + 4te^{-\sqrt{t}}$, definida en todo $\mathbb{R}$.

Integración de funciones reales de una variable real

23) La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x-5),$$

donde x es el "número de bacterias (en millones)" y t es el "tiempo transcurrido (en horas)". Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

(a) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.
(b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?

24) Calcula las siguientes integrales indefinidas. Se trata de integrales inmediatas, es decir, se pueden calcular sin más que hacer alguna manipulación o ajustar alguna constante, o con un cambio de variables obvio.

(j) $\displaystyle\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$ (k) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$ (l) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x+2}\,dx$

(m) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$ (n) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$ (ñ) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}\,dx$

(o) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ (p) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ (q) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x^2\,dx.$

25) Calcula las integrales indefinidas siguientes por el método de integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx$ (c) $\displaystyle\int s\,2^s\,ds$ (d) $\displaystyle\int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx.$

26) Calcula la derivada de las funciones siguientes:

(a) $F(x) = \int_0^x (\operatorname{sen} t^2)\,\ln(1+t^2)\,dt$ (b) $G(x) = \int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\,\ln(1+t^2)\,dt$

27) Calcula las siguientes integrales indefinidas de funciones trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(ax)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x}$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(2\,x)\,dx.$

28) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[4]{x}}x^2\,dx$ (b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int t^2e^t\,dt$ (d) $\displaystyle\int e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ (f) $\displaystyle\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 t\,dt$ (h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$

29) Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(x-2|x|)$ (b) $\displaystyle\int_{1}^{e}\frac{\ln x}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{0}^{T/2}\operatorname{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$ (f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx.$

30) Calcula el área delimitada por las curvas siguientes:

(a) $y=\operatorname{sen} x,\ x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0$ (b) $y=5-x^2,\ y=3-x$

(c) $y=6x-x^2,\ y=x^2-2x$ (d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

31) La región (infinita) encerrada entre $y=0$ y la gráfica de la función $y=1/x^2$ entre $x=1$ e infinito tiene área finita. ¿Cuánto vale dicha área?

Ayuda. Calcula el área entre $x=1$ y $x=N$ y luego haz el límite cuando $N\to\infty$.

32) Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t)=t(1-t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen.

(a) Halla la posición del objeto 10 segundos más tarde.
(b) Halla la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

33) Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{100}(x-100)(200-x).$$

Inicialmente hay $x(0)=180$ individuos.
a) Hallar la función $x(t)$.
b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

34) Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente):

$$v(t)=1000\ t\ e^{-0.5\,t}$$

donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

(a) Calcula el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días.
(b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

35) Una piscifactoría coloca a los alevines de 1 centímetro de longitud en tanques especiales. Se estima que la velocidad de crecimiento de un alevín desde el instante en que se instala en dicho tanque viene dada, en tiempo t (meses) por $v(t)=\dfrac{16t}{(t^2+1)^2}$ (velocidad dada en centímetros por mes). ¿Qué tamaño tendrán los peces 3 meses después de ingresar en los tanques?

36) Calcula el volumen del sólido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada.

(a) $y=1-x^2$, $y=0$; alrededor del eje x.
(b) $y=x^3$, $y=x$, $x\geq 0$; alrededor del eje x.
(c) $y=\ln x$, $y=1$, $y=2$, $x=0$; alrededor del eje y.
(d) $y=1/x$, $y=0$, $x=1$, $x=3$; alrededor de $y=-1$.
(e) $y=x$, $y=0$, $x=2$, $x=4$; alrededor de $x=1$.
(f) $y=2x^2-x^3$, $y=0$; alrededor del eje y.
(g) $y=e^{-x^2}$, $x=0$, $x=1$; alrededor del eje y.

37) Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

(a) Un cono circular recto cuya altura es h y cuya base tiene radio r.
(b) Una pirámide de altura h y base rectangular con dimensiones b y $2b$.
(c) Una cuña de un cilindro circular de radio r definida por un plano ortogonal al eje del cilindro y otro plano que corta al primero en un ángulo de 30 a lo largo del diámetro del cilindro.

38) ¿Para qué valores de b el promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3?

39) Calcula la longitud de las siguientes curvas:

(a) $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $0 \le x \le r$.
(b) $y^2 = 4(x+4)^3$, $0 \le x \le 2$, $y > 0$.
(c) $y = \ln(\cos x)$, $0 \le x \le \pi/3$.
(d) $y = \int_1^x \sqrt{t^3 - 1}\, dt$, $1 \le x \le 4$.