

Análisis Matemático II. Apuntes.
U.A.M., Ingeniería de Telecomunicación

Elaborado en el Dpto. Matemáticas, Univ. Carlos III de Madrid

con modificaciones de D. Yakubovich

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL
EN VARIAS VARIABLES

5 de diciembre de 2023

1. El espacio euclideo \mathbb{R}^n y su topología. Límites y continuidad

Operaciones básicas con vectores en \mathbb{R}^n :

1. Suma:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

2. Producto por un escalar:

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Propiedades:

1. Asociativa:

$$(\mu\lambda)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu(\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n)), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

2. Distributiva 1:

$$(\mu + \lambda)(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. Distributiva 2:

$$\mu\left((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)\right) = \mu(x_1, x_2, \dots, x_n) + \mu(y_1, y_2, \dots, y_n), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}$$

4. Elemento 0:

$$0 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0), \quad \lambda \cdot (0, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0)$$

5. Neutro del producto:

$$1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Producto escalar:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Observación 1.1 Recordemos que $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geq 0$, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$.

Definición 1.2 Se define la **longitud de un vector** \vec{x} como su norma o módulo y se denota por

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Proposición 1.3

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos(\alpha).$$

Como consecuencia tenemos:

1. la desigualdad de Cauchy: $\|\vec{x} \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$
2. la desigualdad triangular: $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$
3. \vec{x}, \vec{y} son vectores ortogonales ($\vec{x} \perp \vec{y}$) si y sólo si $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$.

Definición 1.4 La **distancia** entre dos puntos \vec{x}, \vec{y} de \mathbb{R}^n es la norma de su diferencia, es decir,

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|.$$

Definición 1.5 Una **función** es una regla cualquiera que hace corresponder un punto de \mathbb{R}^m y sólo uno a cada punto de un cierto conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$. $f(\vec{x})$ es el valor de la función f en el punto \vec{x} . El **dominio** de una función es el conjunto de puntos para los que está definida, A en este caso, y se denota por $\text{Dom}(f)$. Si no se especifica nada, se sobreentiende que el dominio de una función está formado por todos los puntos para los cuales tiene sentido la definición. Habitualmente escribiremos

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

para denotar que A es el conjunto inicial o dominio y \mathbb{R}^m el conjunto final, de tal manera que a cada punto de A la función f le asocia un punto de \mathbb{R}^m .

La **imagen** de una función es el conjunto de los puntos \vec{y} tales que existe un punto \vec{x} con $f(\vec{x}) = \vec{y}$, y se denota por $\text{Img}(f)$.

La **gráfica** de una función es el siguiente conjunto de puntos:

$$\{(\vec{x}, f(\vec{x})) : \vec{x} \in \text{Dom}(f)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Por ejemplo, si $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y A es un subconjunto de \mathbb{R} (es decir, $n = m = 1$, entonces la gráfica de f es un subconjunto de \mathbb{R}^2 . Para una función f de un subconjunto de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R} , su gráfica es un subconjunto del espacio \mathbb{R}^3 .

Definición 1.6 La **bola abierta** $B(\vec{x}_0, r)$ de centro $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a distancia menor que r del punto \vec{x}_0 , es decir,

$$B(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < r\}.$$

La **bola cerrada** $\overline{B}(\vec{x}_0, r)$ de centro $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ y radio $r > 0$ es el conjunto de puntos que se encuentran a distancia menor o igual que r del punto \vec{x}_0 , es decir,

$$\overline{B}(\vec{x}_0, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq r\}.$$

Definición 1.7 Sean A un subconjunto de \mathbb{R}^n y sea \vec{p} un punto en \mathbb{R}^n . Decimos que \vec{p} es un **punto de acumulación** de A si para todo radio $\varepsilon > 0$, existe un punto en $A \cap B(\vec{p}, \varepsilon)$, que es distinto de \vec{p} .

Ejemplos. 1) Si A es finito, entonces no tiene puntos de acumulación.

2) Si $A = B(\vec{0}, 1)$ es la bola abierta de radio 1 en \mathbb{R}^n , centrada en el origen $\vec{0}$, entonces sus puntos de acumulación son puntos pertenecientes a la correspondiente bola cerrada $\overline{B}(\vec{0}, 1)$.

3) Sea

$$A = \{\vec{x} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : 1 < x_1 < 2, 2 < x_2 < 4\}.$$

Entonces un punto $\vec{p} = (p_1, p_2)^T \in \mathbb{R}^2$ es un punto de acumulación del conjunto A si y sólo si $1 \leq p_1 \leq 2, 2 \leq p_2 \leq 4$.

Para cualquier subconjunto G de \mathbb{R}^n , denotamos por G^c su complemento en \mathbb{R}^n : $G^c = \mathbb{R}^n \setminus G$.

Definición 1.8 Un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es **abierto** si para todo $\vec{x} \in U$ existe un $r > 0$ (que puede depender de \vec{x}) tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq U$.

Un conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si su complemento F^c es abierto.

Es fácil ver que una bola abierta es un conjunto abierto y que una bola cerrada es cerrada. También es fácil ver que la unión e intersección de un número finito de conjuntos abiertos es abierto, y que la unión e intersección de un número finito de conjuntos cerrados es cerrado.

Definición 1.9 Un **entorno** de un punto $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto que contiene a \vec{x} .

La **frontera** ∂E de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el conjunto de puntos \vec{x} de \mathbb{R}^n (no tienen por qué estar en E) tales que en todo entorno de \vec{x} hay algún punto de E y algún punto de E^c .

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **cerrado** si y sólo si $\partial E \subseteq E$.

El **interior** $\text{int } E$ de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es el subconjunto de puntos \vec{x} de E para los que existe un $r > 0$ (que puede depender de \vec{x}) tal que $B(\vec{x}, r) \subseteq E$. De hecho, el interior de E es el mayor subconjunto abierto de E .

También se puede definir el interior de la siguiente manera:

$$\text{int } E = E \setminus \partial E.$$

El **cierre** \overline{E} de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es $\overline{E} = E \cup \partial E$. De hecho, el cierre de E es el menor conjunto cerrado que contiene a E .

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe un $r > 0$ tal que $E \subseteq B(\vec{0}, r)$.

Un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es **compacto** si es cerrado y acotado.

Proposición 1.10 1) Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es abierto si y sólo si M no contiene ni un sólo punto de su frontera. 2) Un conjunto $M \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado si y sólo si M no contiene ni un sólo punto de su frontera.

Ejemplos 1.11 Las fronteras de los tres conjuntos

$$Q = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| \leq 3\},$$

$$R = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| < 2, |y| < 3\},$$

$$S = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y| < 3\}$$

conjuntos coinciden (son contorno del rectángulo). El conjunto Q es cerrado, porque contiene su frontera. El conjunto R es abierto, porque no contiene ningún punto de su frontera. El conjunto S contiene algunos puntos de su frontera, pero no contiene toda la frontera, con lo cual no es ni abierto, ni cerrado. Los tres conjuntos son acotados. De estos tres, solo el conjunto Q es compacto, al ser cerrado y acotado a la vez.

Definición 1.12 Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Se dice que $\vec{\ell} \in \mathbb{R}^m$ es el **límite** de $f(\vec{x})$ cuando \vec{x} tiende a \vec{x}_0 , y lo escribimos $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que $\|f(\vec{x}) - \vec{\ell}\| < \varepsilon$ si $x \in A$, $0 < \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta$.

Se puede ver que $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{q}} f(\vec{x}) = \vec{\ell}$ si y sólo si $f(\vec{x}^k) \rightarrow \vec{\ell}$ para toda sucesión de puntos $\{\vec{x}^k\}$ contenida en A tales que $\vec{x}^k \neq \vec{q}$ y $\vec{x}^k \rightarrow \vec{q}$ cuando $k \rightarrow \infty$. Esto permite extender la definición del límite en un punto \vec{q} a cualquier función, definida en un conjunto A tal que \vec{q} es su punto de acumulación.

Teorema 1. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si existe el límite cuando \vec{x} tiende a \vec{x}_0 de $f(\vec{x})$, entonces es único. Es decir, si $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}_1$ y $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell}_2$, entonces $\vec{\ell}_1 = \vec{\ell}_2$.

Observación 1.13 Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 que contiene a $(0,0)$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si los límites $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ dependen de θ , entonces no existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$. Si los límites $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ no dependen de θ , entonces **no se puede afirmar nada** sobre la existencia del límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

Si el punto en el que queremos estudiar el límite es $(x_0, y_0) \in A$, entonces se tiene un resultado similar: Si los límites $\lim_{r \rightarrow 0} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \sin \theta)$ dependen de θ , entonces no existe el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y)$.

Ejemplos. 1) $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0;$

2) No existe el límite $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$

3) Si $g(x,y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$, no existe el límite $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} g(x,y)$, aunque el límite de esta función a lo largo de cualquier recta que pasa por el origen existe y es nulo.

Efectivamente, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x, tx) = 0$ para toda constante $t \in \mathbb{R}$. Pero $\lim_{x \rightarrow 0} g(y^2, y) = 1/2$, luego el límite $\lim_{(x,y)^T \rightarrow (0,0)^T} g(x,y)$ no existe.

Proposición 1. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$ y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = 0$ y g está acotada en un entorno de \vec{x}_0 , entonces $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})g(\vec{x}) = 0$.

Teorema 2. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si existen $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})$, entonces:

(1) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (cf(\vec{x})) = c \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \right).$

(2) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) + \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}).$

(3) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f(\vec{x})g(\vec{x})) = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \right) \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) \right),$ si $m = 1$.

(4) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})} = \frac{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})},$ si $m = 1$, y $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x}) \neq 0$.

(5) $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} (f(\vec{x}))^{g(\vec{x})} = \left(\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) \right)^{\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} g(\vec{x})},$

si $m = 1$ y todas las expresiones en la parte derecha tienen sentido.

Teorema 3. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$, donde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, son las funciones componentes de f , entonces $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \vec{\ell} = (l_1, l_2, \dots, l_m)$ si y sólo si $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f_i(\vec{x}) = l_i$ para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Ejemplo 1.14 Sea $A = B(\vec{0}, 2)$ la bola abierta de radio 2 en \mathbb{R}^2 , centrada en el origen. Consideramos la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida como

$$f(x, y) = ((2 - x^2 - y^2)^a, x + 4y)^T,$$

donde a es un parámetro real. Entonces f tiene dos componentes:

$$f_1(x, y) = (2 - x^2 - y^2)^a, \quad f_2(x, y) = x + 4y.$$

Sea $\vec{x}_0 = (x_0, y_0)^T = (2, 0)^T$. Entonces el límite de $f_2(x, y)$ cuando $(x, y)^T \rightarrow (2, 0)^T$ es igual a 2. Luego el límite de $f(x, y)$ cuando $(x, y)^T \rightarrow (2, 0)^T$ existe si y solo si existe el límite $\lim_{(x, y)^T \rightarrow (2, 0)^T} f_1(x, y)$, es decir, si $a \geq 0$. De esta forma, obtenemos que

$$\lim_{(x, y)^T \rightarrow (2, 0)^T} f(x, y) \begin{cases} \text{no existe,} & \text{si } a < 0 \\ = (1, 2)^T, & \text{si } a = 0 \\ = (0, 2)^T, & \text{si } a > 0. \end{cases}$$

En estos apuntes, solo trataremos funciones $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ tales que cada punto de $A = D(f)$ es un punto de acumulación de A . En los problemas, solo se encuentran funciones que tienen esta propiedad.

Definición 1.15 Sean A un subconjunto de \mathbb{R}^n y \vec{x}_0 un punto de A . Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ una función. Si \vec{x}_0 es un punto de acumulación de A . Se dice que f es **continua** en el punto \vec{x}_0 si $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$.

Teorema 4. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si f y g son continuas en \vec{x}_0 , entonces:

- (1) $cf(\vec{x})$ es continua en \vec{x}_0 .
- (2) $f(\vec{x}) + g(\vec{x})$ es continua en \vec{x}_0 .
- (3) $f(\vec{x})g(\vec{x})$ es continua en \vec{x}_0 , si $m = 1$.
- (4) $f(\vec{x})/g(\vec{x})$ es continua en \vec{x}_0 , si $m = 1$ y $g(\vec{x}_0) \neq 0$.
- (5) $(f(\vec{x}))^{g(\vec{x})}$ es continua en \vec{x}_0 , si $m = 1$ y $(f(\vec{x}))^{g(\vec{x})}$ está definida en un entorno de \vec{x}_0 .

Teorema 5. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$, donde $f_i : A \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, son las funciones componentes de f , entonces f es continua en \vec{x}_0 si y sólo si f_i es continua para cada $i = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 6. Sean A un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , $\vec{x}_0 \in A$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \rightarrow \mathbb{R}^k$, donde B es un entorno de $f(\vec{x}_0)$. Si $f(\vec{x})$ es continua en \vec{x}_0 y $g(\vec{x})$ es continua en $f(\vec{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ es continua en \vec{x}_0 .

La importancia de conjuntos compactos para nuestro curso se determina por los siguientes teoremas.

Teorema 7. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si A es compacto y f es continua en A , entonces existen los valores máximo y mínimo de f en A .

Como consecuencia, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 8. Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Si A es compacto y f es continua en A , entonces f está acotada en A .

2. Diferenciación

Definición 2.1 Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función con valores escalares y sea $\vec{x} \in A$. Entonces la **derivada parcial** $\partial f / \partial x_j$ de f en \vec{x} con respecto a la variable x_j se define como

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\vec{x})}{h},$$

donde $1 \leq j \leq n$ y \mathbf{e}_j es el j -ésimo vector de la base canónica; es decir, la derivada parcial de f con respecto a la variable x_j es simplemente la derivada "usual" de f con respecto a la variable x_j , si se supone que el resto de las variables son constantes.

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, entonces $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), \dots, f_m(\vec{x}))$, y podemos hablar de la derivada parcial $\partial f_i / \partial x_j$ de la componente i -ésima de f con respecto a la variable x_j .

Ejemplos 2.2 1) Sea $f(x, y, z) = z^3 \sin(x + 2y) + x^2z$. Entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = z^3 \cos(x + 2y) + 2xz, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 2z^3 \cos(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 3z^2 \sin(x + 2y) + x^2.$$

2) Sea $F(x, y) = (x^{-1} \log(y), e^{3x^2y})^T$. Entonces

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -x^{-2} \log(y), \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = 6xy e^{3x^2y}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{1}{xy}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = 3x^2 e^{3x^2y}.$$

Definición 2.3 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto, $(x_0, y_0) \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **diferenciable** en (x_0, y_0) si $\partial f / \partial x$ y $\partial f / \partial y$ existen en (x_0, y_0) y si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0.$$

En este caso se define el **plano tangente** a la gráfica de f en el punto (x_0, y_0) como

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Recordatorio. Dado un punto $\vec{p}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ y un vector normal $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$, el plano P en \mathbb{R}^3 que pasa por \vec{p}_0 y tiene la normal \vec{n} es

$$P = \{\vec{p} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle \vec{p} - \vec{p}_0, \vec{n} \rangle = 0\} \\ = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x - x_0)A + (y - y_0)B + (z - z_0)C = 0\}.$$

De aquí se ve que el plano tangente a la gráfica de f es el plano que pasa por el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, que corresponde al punto (x_0, y_0) del plano xy y cuyo vector normal es

$$\vec{n} = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right).$$

Es decir, \vec{n} es ortogonal a la gráfica en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

La definición de una función diferenciable de n variables es parecida a la anterior.

Definición 2.4 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **diferenciable** en \vec{q} si existen las derivadas parciales $\partial f / \partial x_1, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n$ en \vec{q} y si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{q}} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{q}) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{q})(x_1 - q_1) - \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{q})(x_2 - q_2) - \dots - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{q})(x_n - q_n)}{\|\vec{x} - \vec{q}\|} = 0.$$

Definición 2.5 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en U . **El gradiente** de f en $\vec{x} \in U$ se define de la siguiente forma:

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 9. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en \vec{x}_0 , entonces f es continua en \vec{x}_0 .

Observación. Puede ocurrir que existan las derivadas parciales de una función en \vec{x}_0 , y que la función no sea continua en \vec{x}_0 . Esto demuestra que la definición que hemos dado de función diferenciable es la “correcta”.

Teorema 10. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si existen todas las derivadas parciales $\partial f_i / \partial x_j$ de f y son continuas en un entorno de \vec{x}_0 , entonces f es diferenciable en \vec{x}_0 .

Definición 2.6 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. La **derivada direccional** de f en \vec{x}_0 a lo largo del vector \vec{v} se define como

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)}{t}.$$

Habitualmente se elige el vector \vec{v} unitario (con norma 1). En este caso se habla de la **derivada direccional de f en \vec{x}_0 en la dirección \vec{v}** , y representa **la tasa de cambio (pendiente) de la función en la dirección de dicho vector**.

Este concepto generaliza a las derivadas parciales, ya que estas son derivadas direccionales en los vectores paralelos a los ejes.

Teorema 11. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si f es diferenciable en \vec{x}_0 entonces existen todas las derivadas direccionales de f en \vec{x}_0 .

Como se verá posteriormente en la Sección 6 utilizando la regla de la cadena, se tiene la siguiente fórmula para la derivada direccional:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle. \quad (1)$$

Calculando el máximo y el mínimo de la expresión $\langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle$ sobre todos los vectores $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ de norma uno, obtenemos la siguiente importante caracterización del gradiente de f :

Corolario. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en \vec{x}_0 y $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\vec{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en \vec{x}_0 de f es máxima y $-\nabla f(\vec{x}_0)$ es la dirección en la que la derivada direccional en \vec{x}_0 de f es mínima (f crece más rápidamente desde \vec{x}_0 en la dirección $\nabla f(\vec{x}_0)$, y decrece más rápidamente en la dirección $-\nabla f(\vec{x}_0)$).

Definición 2.7 Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Dado un número real c , el **conjunto de nivel de valor c** es el conjunto de puntos $\vec{x} \in A$ para los cuales $f(\vec{x})$ es constante, es decir, el conjunto

$$\gamma_c \stackrel{\text{def}}{=} \{ \vec{x} \in A : f(\vec{x}) = c \} \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Si $n = 2$, hablamos de **curva de nivel de valor c** , y si $n = 3$, hablamos de **superficie de nivel de valor c** .

Teorema 12. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en \vec{x}_0 y $\nabla f(\vec{x}_0) \neq 0$, entonces $\nabla f(\vec{x}_0)$ es perpendicular al conjunto de nivel de f de valor $f(\vec{x}_0)$.

Definición 2.8 Una **trayectoria** en \mathbb{R}^n es una aplicación continua $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Si $n = 2$ es una **trayectoria en el plano**, y si $n = 3$ es una **trayectoria en el espacio**. Llamamos **curva** a la imagen de c en \mathbb{R}^n . Si $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$, definimos la **velocidad** de c como $c'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))^T$, y la **aceleración** de c como $c''(t) = (x''_1(t), \dots, x''_n(t))^T$. Llamamos **rapidez** de c a la norma del vector velocidad $c'(t)$.

3. Derivadas parciales de orden superior. Operadores del Cálculo Diferencial vectorial.

Definición 3.1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Definimos las **derivadas parciales de orden 2** de f como

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Esto puede repetirse para las derivadas de tercer orden o de orden superior a tres. De forma análoga se definen las derivadas parciales de orden mayor que uno para funciones de n variables.

Definición 3.2 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f es **de clase C^k** en U si f y todas sus derivadas parciales de orden $1, 2, \dots, k$, son continuas en U .

Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Si $f = (f_1, \dots, f_m)$, decimos que f es **de clase C^k** en U si f_i es de clase C^k en U para $i = 1, 2, \dots, m$.

Teorema 13. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es de clase C^2 en U entonces las derivadas parciales cruzadas son iguales, es decir, si $1 \leq i, j \leq n$ se tiene en U

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Teorema 14. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es de clase C^k en U entonces las derivadas parciales de orden k no dependen del orden de diferenciación.

Por ejemplo, si $f \in C^3$ en U , entonces

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_j \partial x_i},$$

etc.

Definición 3.3 Ya hemos definido el **gradiente** de $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Definimos el **laplaciano** de $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\text{lapl } f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

Definimos la **divergencia** de $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (es decir, $F = (F_1, F_2, \dots, F_n)$) como

$$\text{div } F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial x_n}.$$

Definimos el **rotacional** de $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (es decir, $F = (F_1, F_2, F_3)$) como

$$\text{rot } F = \nabla \times F = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right)^T.$$

Significado geométrico:

1. El **gradiente** de una función escalar f representa “la dirección de máximo crecimiento de dicha función”, y además es perpendicular a las curvas de nivel.
2. El **laplaciano** de una función escalar f es un operador diferencial de segundo orden, relacionado con ciertos “problemas de minimización” de ciertas magnitudes sobre un cierto dominio.
3. La **divergencia** de un campo vectorial F “mide la diferencia entre el flujo entrante y el flujo saliente de un campo vectorial sobre la superficie que rodea a un volumen”. Si el campo tiene “fuentes” entonces $\operatorname{div} F > 0$, si tiene “sumideros” entonces $\operatorname{div} F < 0$, si se compensa $\operatorname{div} F = 0$.
4. El **rotacional** de un campo F es un operador vectorial que muestra la tendencia del campo vectorial F a inducir “rotación alrededor de un punto”. Si $\operatorname{rot} F = 0$ en un punto significa que el fluido no tiene “remolinos” en dicho punto, por lo tanto es **irrotacional**.

4. Estudio local de funciones de varias variables

Definición 4.1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que \vec{x}_0 es un **máximo local** de f si existe un entorno V de \vec{x}_0 tal que $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ para todo $\vec{x} \in V$; \vec{x}_0 es un **máximo local estricto** de f si existe un entorno V de \vec{x}_0 tal que $f(\vec{x}) < f(\vec{x}_0)$ para todo $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{x}_0\}$. Decimos que \vec{x}_0 es un **mínimo local** de f si existe un entorno V de \vec{x}_0 tal que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0)$ para todo $\vec{x} \in V$; \vec{x}_0 es un **mínimo local estricto** de f si existe un entorno V de \vec{x}_0 tal que $f(\vec{x}) > f(\vec{x}_0)$ para todo $\vec{x} \in V \setminus \{\vec{x}_0\}$. El punto \vec{x}_0 es un **extremo local** de f si es un mínimo local o un máximo local. Los puntos \vec{x}_0 que verifican $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$ se denominan **puntos críticos** de f . Un punto crítico que no es un extremo local se denomina **punto de silla**.

Teorema 15. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. Si f es diferenciable en \vec{x}_0 y f presenta en \vec{x}_0 un extremo local, entonces \vec{x}_0 es un punto crítico de f , es decir, $\nabla f(\vec{x}_0) = 0$.

Definición 4.2 Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se define la **matriz Hessiana** de f , evaluada en un punto $\vec{p} \in U$, como

$$Hf(\vec{p}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_n \partial x_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(\vec{p})}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \quad \vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)^T \in U.$$

Suponiendo que f es de clase C^2 , vemos que la matriz Hessiana $Hf(\vec{p})$ es siempre una matriz simétrica.

Teorema 16. (Polinomio de Taylor de orden 1). Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\vec{x}_0 \in U$ se tiene

$$f(\vec{x}_0 + \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + R_1(\vec{x}_0, \vec{h}) = f(\vec{x}_0) + \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) + R_1(\vec{x}_0, \vec{h}),$$

donde $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} R_1(\vec{x}_0, \vec{h}) / \|\vec{h}\| = 0$.

Teorema 17. (Polinomio de Taylor de orden 2). Para $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 en U y $\vec{x}_0 \in U$, se tiene

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_0 + \vec{h}) &= f(\vec{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{x}_0) + R_2(\vec{x}_0, \vec{h}) \\ &= f(\vec{x}_0) + \vec{h} \cdot \nabla f(\vec{x}_0) + \frac{1}{2} \vec{h}^T \cdot Hf(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + R_2(\vec{x}_0, \vec{h}), \end{aligned}$$

donde $\lim_{\vec{h} \rightarrow 0} R_2(\vec{x}_0, \vec{h}) / \|\vec{h}\|^2 = 0$.

Recordamos que para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, su **matriz transpuesta** A^T tiene tamaño $n \times m$ y se define por $(A^T)_{jk} = A_{kj}$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$. Por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Definición. Una matriz cuadrada $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se dice que es simétrica si $A = A^T$.

Por ejemplo, la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ no es simétrica, mientras que la matriz $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ sí lo es.

Definición. Los valores propios (autovalores) λ_j de una matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ se definen como las raíces de la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0, \tag{2}$$

donde I es la matriz identidad.

Los autovalores *de una matriz simétrica* $n \times n$ siempre son reales. Hay n autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, contados con multiplicidades (la multiplicidad de cualquier autovalor λ_j se define como su multiplicidad como raíz de la ecuación polinómica (2)).

Además, siempre existe una base ortonormal $\{v_j\}_{j=1}^n$ en \mathbb{R}^n , compuesta de autovectores de A :

$$Av_j = \lambda_j v_j, \quad v_j \in \mathbb{R}^n, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n,$$

$$\langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ejemplo 4.3 La matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ es simétrica; por esto sus autovalores son reales. Haciendo el cálculo, obtenemos que son:

$$\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 6.$$

La correspondiente base ortogonal de autovectores es

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Ejemplo 4.4 Una matriz simétrica 3×3 con uno de los autovalores de multiplicidad 2. ???

Definiciones. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ una matriz simétrica.

- (1) A se llama *definida positiva* si todos sus autovalores λ_j son positivos;
- (2) A se llama *definida negativa* si todos sus autovalores λ_j son negativos;
- (3) A se llama *semidefinida positiva* si todos sus autovalores λ_j satisfacen $\lambda_j \geq 0$;
- (4) A se llama *semidefinida negativa* si todos sus autovalores λ_j satisfacen $\lambda_j \leq 0$;
- (5) A se llama *indefinida* si tiene tanto autovalores positivos como autovalores negativos.

Cualquier matriz simétrica no nula pertenece a una y sólo una de las clases (3) semidefinidas positivas; (4) semidefinidas negativas; (5) indefinidas. La matrix $A = 0$ no es indefinida, pero es semidefinida positiva y semidefinida negativa a la vez. Las matrices definidas positivas son a la vez semidefinidas positivas. Las matrices definidas negativas son a la vez semidefinidas negativas.

Teorema 18. Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^2 en U , y $\vec{x}_0 \in U$ un punto crítico de f .

- (1) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es definida positiva, entonces \vec{x}_0 es un punto mínimo local estricto de f .
- (2) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es definida negativa, entonces \vec{x}_0 es un punto máximo local estricto de f .
- (3) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es semidefinida positiva, pero no es nula, entonces \vec{x}_0 es un punto un punto mínimo local o un punto silla de f .
- (4) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es semidefinida negativa y no es nula, entonces \vec{x}_0 es un punto máximo local o un punto silla de f .
- (5) Si la matriz $Hf(\vec{x}_0)$ es indefinida, entonces \vec{x}_0 es un punto de silla de f .

Si $Hf(\vec{x}_0) = 0$, puede ocurrir cualquiera de las posibilidades: \vec{x}_0 puede ser tanto un punto mínimo local como un punto máximo local o un punto silla de f .

Los criterios de Sylvester para matrices definidas y para matrices semidefinidas permiten decidir, a cuál de estas clases pertenece la matriz sin necesidad de calcular sus autovalores.

Ver los enlaces:

http://esfm.egormaximenko.com/linalg/quadratic_form_Sylvester_es.pdf
(apuntes de Egor Maximenko)

https://en.wikipedia.org/wiki/Sylvester's_criterion
(Wikipedia en inglés)

Los criterios para determinar si una matriz es definida positiva o negativa requieren menos cálculos que para ver si es semidefinida positiva o negativa. Pero podemos observar que el determinante de una matriz es el producto de sus autovalores (repetidos según su multiplicidad). Por tanto, si $\det A \neq 0$, entonces A es definida positiva si y solo si A es semidefinida positiva, y A es definida negativa si y solo si A es semidefinida negativa; en este caso podemos ahorrar los cálculos.

Teorema 19. (Multiplicadores de Lagrange.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ funciones de clase C^1 en U . Sean $\vec{x}_0 \in U$, $c = g(\vec{x}_0)$ y S el conjunto de nivel de g de valor c (es decir, el conjunto de puntos $\vec{x} \in U$ tales que $g(\vec{x}) = c$). Supongamos que $\nabla g(\vec{x}_0) \neq \vec{0}$. Si la restricción de f a S (denotada por $f|_S$) tiene un máximo o un mínimo local en \vec{x}_0 , entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0).$$

Los puntos \vec{x}_0 que verifican $\nabla f(\vec{x}_0) = \lambda \nabla g(\vec{x}_0)$ se denominan **puntos críticos** de $f|_S$.

Recordamos que, dado un subconjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, su clausura \bar{U} se define como la unión de U con la frontera de U (ver la Parte 1 de los apuntes).

Teorema 20. (Localización de máximos y mínimos absolutos.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, y $f : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en \bar{U} . Entonces los valores máximo y mínimo de f en \bar{U} se alcanzan en puntos pertenecientes a alguno de los siguientes conjuntos:

- (1) los puntos de U en los que f no es diferenciable,
- (2) los puntos críticos de f en U ,
- (3) los puntos máximo y mínimo de $f|_{\partial U}$.

Teorema 20'. (Localización de máximos y mínimos absolutos, otra versión.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y acotado, A un conjunto abierto que contiene a \bar{U} y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en A . Supongamos que existen $c \in \mathbb{R}$ y una función g tales que $\partial U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : g(\vec{x}) = c\}$, g es diferenciable en ∂U y $\nabla g(\vec{x}) \neq 0$ para todo $\vec{x} \in \partial U$. Entonces los valores máximo y mínimo de f en \bar{U} se alcanzan en los puntos críticos de f en U o en los puntos críticos de $f|_{\partial U}$.

5. Criterios de existencia de máximos y mínimos sobre conjuntos no compactos

Teorema 21. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre un subconjunto A de \mathbb{R}^n . *Aquí A no tiene que ser ni abierto ni cerrado.* Supongamos que \vec{q} es un punto de A tal que se cumplen las siguientes hipótesis.

1. f es continua en A ;
2. Para todo punto \vec{p} de acumulación de A , que no pertenece a A , existe un entorno U de este punto tal que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{q})$ si $\vec{x} \in U \cap A$;
3. En el caso de que A no sea acotado, lo mismo se cumple en el infinito. Más precisamente, si A no es acotado, entonces existe un radio (grande) R tal que $f(\vec{x}) \geq f(\vec{q})$ si $\vec{x} \in A$ y $\|\vec{x}\| > R$.

Entonces f alcanza mínimo global sobre A .

En particular, la hipótesis 2 se sigue de la siguiente condición más fuerte:

2'. Para todo punto \vec{p} de acumulación de A , que no pertenece a A , $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}, \vec{x} \in A} f(\vec{x}) = +\infty$.

De la misma forma, la hipótesis 2 se cumple si se tiene

3'. Si A no es acotado, entonces $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty, \vec{x} \in A} f(\vec{x}) = +\infty$.

Con lo cual, las hipótesis del Teorema anterior pueden ser sustituidos por las condiciones 1, 2' y 3'. (Si A no es acotado y se cumplen estas tres últimas condiciones, con toda seguridad f no va a tener un máximo global en A , porque tomaría valores arbitrariamente grandes.

Todos los puntos de acumulación de un conjunto cerrado le pertenecen. Por lo tanto, se obtiene un criterio más simple para la existencia de mínimos globales de funciones, definidas sobre conjuntos cerrados, pero no acotados.

Teorema 22. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre un subconjunto A de \mathbb{R}^n , que es cerrado y no acotado. Supongamos que \vec{q} es un punto de A tal que

$$f(\vec{x}) \geq f(\vec{q}) \quad \text{si } \vec{x} \in A \quad \text{y} \quad \|\vec{x}\| > R. \quad (3)$$

Entonces f alcanza mínimo global sobre A .

De la misma manera, se tiene también

Teorema 23. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua sobre un subconjunto A de \mathbb{R}^n , que es cerrado y no acotado. Si $\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty, \vec{x} \in A} f(\vec{x}) = +\infty$, entonces f alcanza mínimo global sobre A .

Es fácil enunciar resultados análogos para la existencia del máximo global de f (se obtienen de los anteriores cambiando f por $-f$). Por ejemplo, en el Teorema 5 hay que sustituir la condición (3) por la condición $f(\vec{x}) \leq f(\vec{q})$ si $\vec{x} \in A$ y $\|\vec{x}\| > R$. En el Teorema 5, hay que pedir que el límite de f en el infinito sea igual a $-\infty$, en vez de ∞ .

En los problemas, puede ser útil también la siguiente observación.

Teorema 24. Sea f una expresión polinómica en x_1, x_2, \dots, x_n de la forma

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 x_1^{m_1} + \alpha_2 x_2^{m_2} \cdots + \alpha_n x_n^{m_n} + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

donde m_1, m_2, \dots, m_n son pares, todos los "coeficientes principales" $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ son positivos y

$$\text{grado}(g) < \min\{m_1, \dots, m_n\}.$$

Entonces

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow \infty} f(\vec{x}) = +\infty.$$

Se sigue, por ejemplo, que $\lim_{\|(x,y,z)\| \rightarrow \infty} x^{12} + 2y^6 + \frac{1}{2}z^4 - 7xyz = +\infty$.

(aquí $n = 3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = \frac{1}{2}, m_1 = 12, m_2 = 6, m_3 = 4$).

6. Diferenciación de funciones de \mathbb{R}^n a \mathbb{R}^m . La matriz de Jacobi. La regla de cadena.

Definición 6.1 Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $\vec{x}_0 \in U$ y $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$. Decimos que f es diferenciable en \vec{x}_0 si las derivadas parciales de f existen en \vec{x}_0 y si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\|f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \mathbf{T}(\vec{x} - \vec{x}_0)\|}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = 0,$$

donde \mathbf{T} es la siguiente matriz:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

y $\mathbf{T}(\vec{x} - \vec{x}_0)$ es el producto de \mathbf{T} con $\vec{x} - \vec{x}_0$. La matriz T tiene orden $m \times n$, su elemento en la fila i y columna j es $\partial f_i / \partial x_j$ evaluada en \vec{x}_0 . Esta matriz se llama la **derivada** o **matriz jacobiana** de f en \vec{x}_0 .

Notación: $\mathbf{T} = \mathbf{D}f(\vec{x}_0)$.

Otra notación: Si los puntos de U se denotan como $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ y los puntos de \mathbb{R}^m se denotan como $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)^T$, entonces se escribe

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{pmatrix} = f(x_1, \dots, x_n),$$

$$\mathbf{D}f(\vec{x}_0) = \frac{\partial(y_1, \dots, y_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \frac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}}_{m \times n}.$$

Observación 6.2 Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto y $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en U , entonces la matriz derivada de f en \vec{x} tiene 1 fila y n columnas:

$$\mathbf{D}f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \right).$$

Entonces el gradiente de f en \vec{x} se relaciona con $\mathbf{D}f(\vec{x})$ de la siguiente forma:

$$\text{grad } f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \cdots \\ \frac{\partial f(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix} = (\mathbf{D}f(\vec{x}))^T.$$

Teorema 25. (Regla de la cadena.) Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $V \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos abiertos con $\vec{x}_0 \in U$ y $f(\vec{x}_0) \in V$, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : V \rightarrow \mathbb{R}^k$. Si $f(\vec{x})$ es diferenciable en \vec{x}_0 y $g(\vec{x})$ es diferenciable en $f(\vec{x}_0)$, entonces la composición $(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$ es diferenciable en \vec{x}_0 , y se tiene la igualdad de matrices:

$$\underbrace{\mathbf{D}(g \circ f)(\vec{x}_0)}_{k \times n} = \underbrace{\mathbf{D}g(f(\vec{x}_0))}_{k \times m} \cdot \underbrace{\mathbf{D}f(\vec{x}_0)}_{m \times n}.$$

Ejemplo 1. Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))^T$. Si definimos $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $h = g \circ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$g(\vec{f}(t)) = g(x(t), y(t), z(t)),$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial g}{\partial z} \frac{dz}{dt}.$$

Ejemplo 2. Si $\vec{f}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, podemos escribir

$$\vec{f}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))^T.$$

Si definimos $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ por $h(x, y, z) = g(\vec{f}(x, y, z)) = g(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}, \\ \frac{\partial h}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}. \end{aligned}$$

Observación 6.3 Para deducir la fórmula (1) de la Regla de cadena, basta poner $\vec{x}(t) = \vec{x}_0 + t\vec{v}$, de forma que $\mathbf{D}\vec{x}(t) = \vec{v}$ para todo t . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) &= \mathbf{D}(f \circ \vec{x})(t) = \mathbf{D}f(\vec{x}(t)) \mathbf{D}\vec{x}(t) = \mathbf{D}f(\vec{x}(t))\vec{v}; \\ \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) &= \left. \frac{d}{dt} f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) \right|_{t=0} = \mathbf{D}f(\vec{x}(0))\vec{v} = \mathbf{D}f(\vec{x}_0)\vec{v} = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle. \end{aligned}$$

Hemos obtenido la siguiente fórmula para la derivada direccional de f en \vec{x}_0 en la dirección \vec{v} :

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(\vec{x}_0) = \mathbf{D}f(\vec{x}_0)\vec{v} = \langle \nabla f(\vec{x}_0), \vec{v} \rangle.$$

Teorema 26. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos abiertos. Sean

$$f: A \rightarrow B, \quad g: B \rightarrow A$$

funciones inversas una a otra (es decir, $f \circ g(\vec{y}) = \vec{y}$ para todo $\vec{y} \in B$ y $g \circ f(\vec{x}) = \vec{x}$ para todo $\vec{x} \in A$). Si $\vec{p}_0 \in A$, $\vec{q}_0 = f(\vec{p}_0) \in B$, f es diferenciable en \vec{p}_0 y la matriz jacobiana $\mathbf{D}f(\vec{p}_0)$ no es singular, entonces g es diferenciable en \vec{q}_0 y

$$\mathbf{D}g(\vec{q}_0) = [\mathbf{D}f(\vec{p}_0)]^{-1}.$$

En otras palabras, si $\vec{y} = f(\vec{x})$, $x \in A$, entonces $\vec{x} = g(\vec{y})$, $y \in B$, y

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \left[\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right]^{-1}.$$

7. Integración en \mathbb{R}^n

Definición 7.1 Sea R un **rectángulo n -dimensional** $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$, con $a_i < b_i$, para $i = 1, \dots, n$. Se define el **volumen n -dimensional** de R como

$$|R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n).$$

Observación. Habitualmente la dimensión n será dos o tres, por lo que estaremos trabajando con subconjuntos del plano o del espacio. Si $n = 2$, la medida de R es el área de R . Si $n = 3$, la medida de R es el volumen de R en el sentido usual.

Definición 7.2 Un conjunto A de \mathbb{R}^n se dice que tiene **volumen cero** (n -dimensional), y lo escribiremos $|A| = 0$, si para cada $\varepsilon > 0$ existen rectángulos n -dimensionales R_1, R_2, \dots, R_m tales que

$$A \subset R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m \quad \text{y} \quad |R_1| + |R_2| + \dots + |R_m| < \varepsilon.$$

Diremos que una propiedad se verifica en **casi todo punto de B** si el conjunto de puntos de B que no verifican esa propiedad tiene medida cero.

Lema 1.

- (1) Se obtiene una definición equivalente de conjuntos de volumen cero si se toman rectángulos abiertos (o bolas abiertas o bolas cerradas) en vez de rectángulos cerrados.
- (2) Si $A \subset B$ y $|B| = 0$, entonces $|A| = 0$.
- (3) Si A es un conjunto finito o numerable y compacto, entonces $|A| = 0$. Se dice que A es numerable si $A = \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots\}$, donde $\{\vec{a}_n\}$ es una sucesión de puntos (finita o infinita).
- (4) La unión finita de conjuntos de medida cero tiene medida cero.
- (5) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es una gráfica de una función continua:

$$A = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_n) : (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \Omega, \quad x_n = f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \right\},$$

donde f está definida en un subconjunto compacto Ω de \mathbb{R}^{n-1} y es continua, entonces $|A| = 0$.

Corolario 1. La unión finita de curvas en \mathbb{R}^n tiene medida cero si $n \geq 2$. La unión finita de superficies en \mathbb{R}^n tiene medida cero si $n \geq 3$.

Definición 7.3 1) Una **partición** P del rectángulo n -dimensional R es una partición de cada uno de los intervalos coordenados $[a_i, b_i]$, de modo que expresamos R como unión de subrectángulos $R = \cup_{i=1}^N R_i$.

2) Dada una partición $R = \cup_{i=1}^N R_i$ de R , entendemos por su **rango** el máximo de los diámetros de los subrectángulos R_i . Está claro que se puede encontrar particiones de R de rangos tan pequeños como queramos.

Sea R un rectángulo n -dimensional, $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función y sea $P = \cup_{i=1}^N R_i$ una partición de R . La **suma de Riemann** de f que corresponde a una partición P es la suma finita

$$S = \sum_i f(\vec{x}_i) \cdot |R_i|, \quad (***)$$

donde los puntos $\vec{x}_i \in R_i$ se eligen de forma arbitraria.

Definición 7.4 Sea $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función en un rectángulo n -dimensional R . Vamos a decir que f es **admisibile** si está acotada en R y es continua en R salvo en un subconjunto de R de volumen n -dimensional 0.

Definición 7.5 Sea f una función admisible en R , siendo R un rectángulo n -dimensional. Se puede demostrar que entonces existe un único número I tal que, dado cualquier $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un $\delta > 0$ tal que cualquier suma de Riemann (***) que corresponde a cualquier partición de R de rango menor que δ satisface

$$|S - I| < \varepsilon.$$

Al número I lo llamaremos la **integral (definida)** de f en R , y lo escribiremos

$$I = \int_R f = \int_R f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = \int_{a_n}^{b_n} \cdots \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n.$$

Teorema 27. (Teorema de Fubini para el caso de dos variables). Sea

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] = \{(x, y)^T \in \mathbb{R}^2 : x \in [a_1, b_1], y \in [a_2, b_2]\}$$

un rectángulo 2-dimensional. Si f es una función admisible en R entonces

$$\int_R f = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{a_2}^{b_2} \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x, y) dx \right) dy.$$

Ejemplo 7.6 Sea $f(x, y) = x^2 y^3$ Calcular la integral $\iint f(x, y) dx dy$, donde $R = [0, 1] \times [0, 2]$.

Solución:

$$\iint x^2 y^3 dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^2 x^2 y^3 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{y^4}{4} \Big|_{y=0}^{y=2} \right) dx = \int_0^1 4x^2 dx = \frac{4}{3} x^3 \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{4}{3}.$$

Nótese el uso del símbolo \iint para denotar la integral de una función de dos variables.

Teorema 28'. (Teorema de Fubini, caso general). Sea

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n] = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 \in [a_1, b_1], x_2 \in [a_2, b_2], \dots, x_n \in [a_n, b_n]\}$$

un rectángulo n -dimensional. Lo representamos como $R = R_1 \times R_2$, donde $R_1 = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_j, b_j]$ y $R_2 = [a_{j+1}, b_{j+1}] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Si f es una función admisible en R entonces

$$\int_R f = \int_{R_1} \left(\int_{R_2} f(x, y) dy \right) dx = \int_{R_2} \left(\int_{R_1} f(x, y) dx \right) dy,$$

donde $x = (x_1, \dots, x_j)$ e $y = (x_{j+1}, \dots, x_n)$.

En el caso de 3 variables, cuando $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, podemos poner

$$R_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad R_2 = [a_3, b_3],$$

ó bien

$$R_1 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2], \quad R_2 = [a_2, b_2] \times [a_3, b_3].$$

En el primer caso, el Teorema de Fubini nos da la fórmula

$$\iiint_R f = \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} \left(\int_{[a_3, b_3]} f(x, y) dy \right) dx = \int_{[a_3, b_3]} \left(\iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} f(x, y) dx \right) dy,$$

es decir, el cálculo de una integral triple se reduce al cálculo simbólico de una integral una integral simple de una función de una sola variable y luego a una integral doble.

Nótese que el símbolo \iiint se utiliza para denotar la integrales de funciones de tres variables. En un contexto más abstracto, se utiliza también la notación $\int_R f(\vec{x}) d\vec{x}$ para la integral de una función de n variables.

Por una **región** en \mathbb{R}^n entendemos un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n .

Definición 7.7 Sea D es una región acotada en \mathbb{R}^n , cuya frontera tiene volumen 0. Sea f una función admisible en D se define la **integral de f en D** como

$$\int_D f = \int_R f^*,$$

donde R es cualquier rectángulo n -dimensional que contenga a D y f^* es la función definida en todo \mathbb{R}^n como

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in D \\ 0 & \text{si } x \notin D. \end{cases}$$

Teorema 29. Sean f, g funciones integrables en la región acotada D y sea $c \in \mathbb{R}$ una constante. *
Entonces

- (i) $f + g$ es integrable en D y $\int_D (f + g) = \int_D f + \int_D g$,
- (ii) cf es integrable en D y $\int_D cf = c \int_D f$,
- (iii) Si $f \leq g$ en D , entonces $\int_D f \leq \int_D g$,
- (iv) $|f|$ es integrable en D y $\int_D |f| \geq \left| \int_D f \right|$,
- (v) $f \cdot g$ es integrable en D y $\left(\int_D fg \right)^2 \leq \left(\int_D f^2 \right) \left(\int_D g^2 \right)$.

Observaciones. Las propiedades (i) y (ii) nos indican que el conjunto de las funciones integrables en D es un espacio vectorial y la integral es un operador lineal en este espacio. La propiedad (v) se

denomina **desigualdad de Cauchy-Schwarz**. La propiedad (iii) implica, en particular, que $\int_D f \geq 0$ si $f \geq 0$ en D .

Ejercicio. Se define el producto directo

$$D \times D = \{(x_1, x_2, \dots, x_{2n}) : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D, (x_{n+1}, x_2, \dots, x_{2n}) \in D.\}$$

Sean f, g funciones integrables en D . Demostrar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a partir de la obvia desigualdad

$$\int_{D \times D} (f(x)g(y) - g(x)f(y))^2 dx dy \geq 0.$$

Definición 7.8 Si la región acotada D verifica $|\partial D| = 0$, se define la medida de D como $|D| = \int_D 1$. Por tanto, si $D \subset \mathbb{R}^2$, $\int_D 1$ es el área de D y, si $D \subset \mathbb{R}^3$, $\int_D 1$ es el volumen de D .

El siguiente resultado proporciona un método práctico del cálculo de integrales de funciones de 2 variables.

Teorema 30. Sea D un conjunto acotado en \mathbb{R}^2 , cuya frontera tiene área cero. Fijado un $x \in \mathbb{R}$, denotamos

$$D_{x\bullet} = \{y \in \mathbb{R} : (x, y)^T \in D\}.$$

Sea $X(D)$ la proyección de D sobre el eje x (normalmente, es un intervalo).

Si $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ es una función admisible, entonces

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{X(D)} \left(\int_{D_{x\bullet}} f(x, y) dy \right) dx.$$

Ejemplo 7.9 Sea D el triángulo acotado por el eje x , la recta $x = 1$ y la recta $y = 2x$. Calcular $\iint_D xy dx dy$.

Solución: La proyección $X(D)$ del triángulo D sobre el eje x es el intervalo $[0, 1]$. Dado un $x \in [0, 1]$, $D_{x\bullet}$ es el conjunto de puntos $y \in \mathbb{R}$ tales que el punto del plano $(x, y)^T$ pertenece a nuestro triángulo. Luego $D_{x\bullet} = [0, 2x]$. Aplicando la fórmula, obtenemos:

$$\iint_D xy dx dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2x} xy dy \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2x} \right) dx = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}.$$

En este ejemplo, la integral doble se reduce a una integral *iterada*, donde la integración respecto de y es interior y la integración respecto de x es exterior. Podemos hacerlo en otro orden. Si fijamos un $y \in \mathbb{R}$, se define

$$D_{\bullet y} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y)^T \in D\}.$$

Entonces se tiene la fórmula

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{Y(D)} \left(\int_{D_{\bullet y}} f(x, y) dx \right) dy,$$

donde $Y(D)$ es la proyección de D sobre el eje y . En el ejemplo anterior, el intervalo $Y(D)$ es el intervalo $[0, 2]$, y $D_{\bullet y} = [y/2, 1]$ para todo $y \in [0, 2]$. Si calculamos la integral doble de esta forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} \iint_D xy dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{y/2}^1 xy dx \right) dy = \int_0^2 \left(\frac{x^2 y}{2} \Big|_{x=y/2}^{x=1} \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{y^3}{8} \right) dy = \frac{y}{2} - \frac{y^4}{32} \Big|_{y=0}^{y=2} = 1 - \frac{16}{32} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por supuesto, la respuesta es la misma.

Fórmulas para las integrales triples Dada una región acotada D en \mathbb{R}^3 , denotamos por $X(D)$ la proyección de D sobre el eje x , por $XY(D)$ la proyección de D sobre el plano xy , etc.

Fijado un $x_0 \in \mathbb{R}$, ponemos

$$D_{x_0 \bullet \bullet} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 : (x_0, y, z)^T \in D\}.$$

Es la proyección de la intersección de D con el plano $x = x_0$ (paralelo al plano yz) sobre el plano yz .

De la misma forma, fijado un punto (x_0, y_0) en \mathbb{R}^2 , ponemos

$$D_{x_0 y_0 \bullet} = \{z \in \mathbb{R} : (x_0, y_0, z)^T \in D\}.$$

Es la proyección de la intersección de D con la recta $x = x_0, y = y_0$, paralela al eje z , sobre el eje z .

Con esta notación, se tienen las fórmulas

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{X(D)} dx \iint_{D_{x \bullet \bullet}} f(x, y, z) \, dy \, dz;$$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{XY(D)} dx \, dy \int_{D_{xy \bullet}} f(x, y, z) \, dz,$$

que reducen el cálculo de una integral triple a un cálculo consecutivo de una integral simple y una doble.

Cambiando el orden de integración, se puede escribir más fórmulas de este tipo, por ejemplo:

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{Z(D)} dz \iint_{D_{\bullet \bullet z}} f(x, y, z) \, dx \, dy,$$

$$\iiint_D f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{XZ(D)} dx \, dz \iint_{D_{x \bullet z}} f(x, y, z) \, dx \, dz,$$

etcétera.

Teorema 31. Sea D una región acotada. Si las funciones f y g son integrables en D y son iguales en casi todo punto de D , es decir, el conjunto $\{x \in D : f(x) \neq g(x)\}$ tiene volumen n -dimensional cero, entonces

$$\int_D f = \int_D g.$$

Teorema 32. Si f está definida en una región acotada D , es admisible y $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in D$, entonces

$$m |D| \leq \int_D f \leq M |D|.$$

Teorema 33. Sea f una función admisible en la región acotada D . Si $f(x) \geq 0$ para casi todo $x \in D$ y existe un punto $x_0 \in D$ con f continua en x_0 y $f(x_0) > 0$, entonces

$$\int_D f > 0.$$

Teorema 34. Sean D una región acotada y f una función definida en D . Si D es la unión de las regiones de interiores disjuntos $D = D_1 \cup \dots \cup D_k$, con $|\partial D_i| = 0$ para $i = 1, \dots, k$, entonces f es integrable en D si y sólo si es integrable en D_i para $i = 1, \dots, k$. Además se tiene que

$$\int_D f = \sum_{i=1}^k \int_{D_i} f.$$

Definición 7.10 Sean Ω^* un dominio en \mathbb{R}^n y $\vec{x} = T(\vec{u})$ una transformación diferenciable, donde $T : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}^n$. El **jacobiano** de T es el determinante de la matriz derivada de T , es decir,

$$JT(\vec{u}) = \det \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} = \det(DT(\vec{u})), \quad \vec{u} \in \Omega^*.$$

Teorema 35. (Teorema de cambio de variable). Sean Ω^* y Ω regiones acotadas de \mathbb{R}^n y $T : \Omega^* \rightarrow \Omega$ una transformación biyectiva de clase C^1 . Entonces para toda f integrable en Ω se tiene

$$\int_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} = \int_{\Omega^*} f(T(\vec{u})) |JT(\vec{u})| d\vec{u},$$

donde $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ y $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$.

Observación 1. El Teorema de cambio de variable sigue siendo cierto si las hipótesis de biyectividad y diferenciabilidad dejan de cumplirse en conjuntos de medida cero.

Observación 2. Si T^{-1} denota la inversa de la aplicación diferenciable T , del Teorema de la función inversa se deduce $(JT(\vec{u})) \cdot (JT^{-1}(T(\vec{u}))) = 1$, $t \in \Omega^*$.

Cambio a coordenadas polares. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ a (r, θ) , con $r \geq 0$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, mediante las fórmulas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

El determinante jacobiano del cambio es r .

Cambio a coordenadas cilíndricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a (r, θ, z) , con $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $z \in \mathbb{R}$, mediante las fórmulas:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z.$$

El determinante jacobiano del cambio es r .

Cambio a coordenadas esféricas. Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ a (ρ, φ, θ) , con $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, mediante las fórmulas:

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta.$$

El determinante jacobiano del cambio es $\rho^2 \sin \theta$.

APLICACIONES DE LA INTEGRAL EN DIMENSION n .

Valor medio. Si D es una región acotada en \mathbb{R}^n y f es una función integrable en D se define el promedio o valor medio de f en D como

$$\frac{1}{|D|} \int_D f = \frac{\int_D f}{\int_D 1}.$$

Centro de gravedad. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **centro de gravedad** o **centro de masa** (y lo denotaremos por $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$), como

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{M} \iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ \bar{y} &= \frac{1}{M} \iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz, \\ \bar{z} &= \frac{1}{M} \iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz, \end{aligned}$$

donde M es la **masa** del cuerpo, que puede calcularse como $M = \iiint_D \rho(x, y, z) dx dy dz$.

Momento de inercia. Si un cuerpo ocupa una región del espacio D y en cada punto $(x, y, z) \in D$ su densidad es $\rho(x, y, z)$, se define su **momento de inercia respecto del eje E** (y lo denotaremos por I_E) como

$$I_E = \iiint_D \text{dist}((x, y, z), E)^2 \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

donde $\text{dist}((x, y, z), E)$ es la distancia del punto (x, y, z) al eje E . Recordemos que $\text{dist}((x, y, z), X)^2 = y^2 + z^2$, $\text{dist}((x, y, z), Y)^2 = x^2 + z^2$ y $\text{dist}((x, y, z), Z)^2 = x^2 + y^2$.