1) Sea $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ con $u = \frac{x-y}{2}$, $v = \frac{x+y}{2}$. Aplica la regla de la cadena para calcular $\nabla F(x,y)$ en función de las derivadas parciales de f, $\frac{\partial f}{\partial u}$ y $\frac{\partial f}{\partial v}$.

2) Las relaciones $u = f(x,y)$, $x = x(t)$ e $y = y(t)$ definen u como función escalar de t, digamos $u = u(t)$. Aplica la regla de la cadena para calcular la derivada de u respecto de t cuando

$$f(x,y) = e^{xy} \cos x y^2, \qquad x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

3) La sustitución $t = g(x,y)$ convierte $F(t)$ en $f(x,y) = F(g(x,y))$. Calcula la matriz de $Df(x,y)$ en el caso particular en que $F(t) = e^{\operatorname{sen} t}$ y $g(x,y) = \cos(x^2+y^2)$.

4) Evalúa las integrales dobles siguientes, donde R es la región acotada por las ecuaciones que se dan en cada caso (habrá que elegir el orden de integración más conveniente):

(a) $\iint_R x^3y^2\,dA$; $\quad y = x$, $y = 0$, $x = 1$

(b) $\iint_R (2x+4y+1)\,dA$; $\quad y = x^2$, $y = x^3$

(c) $\iint_R 2xy\,dA$; $\quad y = x^3$, $y = 8$, $x = 0$

(d) $\iint_R \frac{xy^2}{x^2+1}\,dA$; $\quad x = 0$, $x = 1$, $y = -3$, $y = 3$.

5) Invierte el orden de integración en las integrales iteradas siguientes:

(a) $\int_0^2 \int_0^{y^2} f(x,y)\,dx\,dy$ $\qquad$ (b) $\int_0^3 \int_1^{e^x} f(x,y)\,dy\,dx$.

6) Calcula el volumen de los siguientes sólidos:

(a) Bajo el paraboloide $z = x^2+y^2$ y sobre la región delimitada por $y = x^2$ y $x = y^2$.

(b) Delimitado por el paraboloide $z = x^2+y^2+4$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x+y = 1$.

7) Dibuja la región tridimensional de integración correspondiente a la siguiente integral triple:

$$\int_0^6 \int_0^{4-2x/3} \int_0^{3-x/2-3y/4} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx.$$

8) Expresa la integral del ejercicio anterior como integral iterada en el orden $dy\,dx\,dz$.

9) Calcula $\int_0^1 \int_0^1 \int_0^{2-x^2-y^2} xye^z\,dz\,dx\,dy$.

10) Halla el valor de las siguientes integrales, determinando y dibujando en cada caso el recinto de integración:

(a) $\iiint_Q (2x+3y+z)\,dx\,dy\,dz$, con $Q = [1,2]\times[-1,1]\times[0,1]$.

(b) $\iiint_T x^2\cos z\,dx\,dy\,dz$, siendo T la región limitada por los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = \pi$, $x+y = 1$.

(c) $\iiint_\Omega x\,y^2\,z^3\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $z = x\,y$ y los planos $y = x$, $x = 1$ y $z = 0$.

(d) $\iiint_\Omega x\,y\sqrt{z}\,dx\,dy\,dz$, siendo Ω el sólido limitado por la superficie $y = x^2$ y los planos $y = z$, $y = 1$ y $z = 0$.

11) En cada uno de los siguientes casos, la integral triple $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$ de la función positiva f se reduce a la integral iterada dada. Dibuja la región de integración $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ y su proyección sobre el plano $z = 0$. Escribe entonces la integral como una o varias integrales iteradas en las que la integración se hace en el orden $dz\,dx\,dy$.

(a) $\int_0^1 \left(\int_0^x \left(\int_0^y f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$.

(b) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz \right) dy \right) dx$.

(c) $\int_0^1 \left(\int_0^1 \left(\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx$.

12) Halla la masa y el centro de masas de:

(a) La lámina $[0,2] \times [-1,1]$ con densidad $\rho(x,y) = xy^2$.

(b) La lámina, con densidad $\rho(x,y) = 3$, delimitada por la parábola $x = y^2$ y la recta $y = x - 2$.

(c) El sólido, con densidad $\rho(x,y,z) = 2$, bajo el plano $z = 1 + x + y$ y sobre la región del plano xy delimitada por las curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ y $x = 1$.

(d) El cubo $[0,a] \times [0,a] \times [0,a]$ con densidad $\rho(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$.

13) La densidad de carga eléctrica sobre el rectángulo $[1,3] \times [0,2]$ viene dada por la función $\sigma(x,y) = 2xy + y^2$ (medida en culombios por metro cuadrado). Halla la carga total de tal placa rectangular.

14) Calcula el valor medio de:

(a) La función $f(x,y,z) = xyz$ sobre el cubo de lado L situado en el primer octante, con lados paralelos a los ejes coordenados, y con un vértice en el origen.

(b) La función $f(x,y,z) = yz\cos(x^5)$ sobre el sólido $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x,\ x \leq z \leq 2x\}$.

Nota. Con frecuencia, ciertas integrales se calculan mucho más fácilmente mediante un cambio de variables. Hay tres cambios de variables bastante recurrentes: se trata de los cambios a coordenadas polares, cilíndricas o esféricas. Las coordenadas polares se usan cuando tenemos una integral doble y el recinto de integración tiene simetría circular. Los cambios a coordenadas cilíndricas o esféricas se usan para calcular integrales triples sobre regiones con simetrías cilíndricas o esféricas, respectivamente.

Se trata de los siguientes cambios:

1. Polares: $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, $dA = r\, dr\, d\theta$ (¡no olvidarse de la r al sustituir dA!).
2. Cilíndricas: $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, $dA = r\, dz\, dr\, d\theta$ (es como las polares, dejando sin tocar la z).
3. Esféricas: $x = r\operatorname{sen}\varphi\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\theta$, $z = r\cos\varphi$, $dA = r^2\operatorname{sen}\varphi\, dr\, d\theta\, d\varphi$.

En todos los casos, en la correspondiente integral iterada, hay que adaptar convenientemente los límites de integración a las nuevas variables. Por ejemplo, si integramos $f(x,y)$ sobre la región R del semiplano superior (es decir, $y \geq 0$) delimitada por las circunferencias $x^2 + y^2 = 1$ y $x^2 + y^2 = 4$ (es decir, una semicorona circular de radios 1 y 2), entonces, pasando a polares, tendríamos que calcular

$$\iint_R f(x,y) dA = \int_0^\pi \int_1^2 f(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta)\, r\, dr\, d\theta.$$

Los siguientes ejercicios se resuelven usando alguno de estos tres cambios de variables. No entran en el examen, pero se recomienda intentar resolver alguno de ellos.

15) Usa coordenadas polares para evaluar las integrales siguientes:

(a) $\iint_R e^{x^2+y^2}\, dA$, con R la corona circular de radio entre 1 y 2.

(b) $\int_0^2 \int_x^{\sqrt{8-x^2}} \frac{1}{5+x^2+y^2}\, dy\, dx$.

16) Calcula $\iiint_R ze^{x^2+y^2}\, dV$ donde R es el cilindro de base circular de radio 2 centrada en el origen y altura $0 \leq z \leq 5$.

17) Determina y dibuja el recinto de integración y halla el valor de las siguientes integrales, cambiando a coordenadas cilíndricas:

(a) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, siendo Ω el sólido limitado por el paraboloide $x^2 + y^2 = 2z$ y el plano $z = 2$.

(b) $\iint_\Omega dx\, dy\, dz$, siendo Ω la región limitada por los planos coordenados, $z = x^2 + y^2$ y $x + y = 1$.

(c) $\iiint_\Omega (y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ siendo Ω un cono recto de revolución, de altura h, base de radio $a>0$ situado en el plano $z=0$ y eje en el eje z.

18) Utiliza coordenadas esféricas para calcular las siguientes integrales triples. Dibuja el recinto de integración en cada caso.

(a) $\iiint_B \frac{1}{(x^2+y^2+z^2+9)^2}\,dx\,dy\,dz$, siendo B la bola de radio 3 centrada en el origen de coordenadas.

(b) $\iiint_C x\,y\,z\,dx\,dy\,dz$, con $C=\big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\le 1,\ x,y,z\ge 0\big\}$.

(c) $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$, siendo D la corona entre las esferas de radios a y $2\,a$.