1) Calcula el límite, si existe, o razona por qué no existe.

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-2)} \left(x^2y-3y+xy^3\right)$ (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ (c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+1}{y^6}\right)$.

2) Dibuja las curvas de nivel de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$.

(a) $f(x,y)=y+2$ (b) $f(x,y)=x^2+4\,y^2$ (c) $f(x,y)=\sqrt{9-x^2-y^2}$

(d) $f(x,y)=e^x$ (e) $f(x,y)=y-\mathrm{sen}\,x$ (f) $f(x,y)=-xy$

(g) $f(x,y)=y-x^2$ (h) $f(x,y)=x+y^2$ (i) $f(x,y)=y-\ln x$.

3) Dibuja la gráfica de las funciones (a), (b), (c) y (d) del ejercicio anterior.

4) Dibuja las superficies de nivel de las siguientes funciones $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$.

(a) $f(x,y,z)=x+1$ (b) $f(x,y,z)=(x-1)^2+y^2+(z-2)^2$

(c) $f(x,y,z)=x-y$ (d) $f(x,y,z)=x^2+y^2$.

5) Esboza las siguientes curvas en el plano $\mathbb{R}^2$ o en el espacio $\mathbb{R}^3$ según corresponda, indicando con una flecha la dirección de crecimiento del parámetro t. Para cada una de ellas, calcula su vector tangente $\alpha'(t)$ y su vector aceleración $\alpha''(t)$ en cada instante t.

(a) $\alpha(t)=(t,2t-1)$ (b) $\alpha(t)=(t,t^2+1)$ (c) $\alpha(t)=(2\cos t,2\,\mathrm{sen}\,t)$

(d) $\alpha(t)=(t\cos t,t\,\mathrm{sen}\,t)$ (e) $\alpha(t)=(e^t\cos t,e^t\,\mathrm{sen}\,t)$ (f) $\alpha(t)=(\mathrm{sen}\,t,3,\cos t)$

(g) $\alpha(t)=(\cos 2t,\mathrm{sen}\,2t,t)$ (h) $\alpha(t)=(t,0,t^3)$ (i) $\alpha(t)=(\cosh t,\mathrm{senh}\,t)$.

6) Si nos encontramos en el punto $(-1,-1)$ de una zona montañosa cuyo perfil viene dado por $f(x,y)=x^2e^y+xy$ y miramos en la dirección del eje x positivo, ¿vemos una cuesta hacia arriba o hacia abajo? ¿Y si miramos en la dirección del eje y negativo? De todas las direcciones (360 grados) en las que podemos mirar a nuestro alrededor, ¿en cuál de ellas se divisa una cuesta abajo más pronunciada cerca de nosotros?

7) Halla la matriz jacobiana de f en a (es decir $Df(a)$) en cada uno de los siguientes casos:

(a) $f(x,y)=(y,x,xy,y^2-x^2)$, $a=(1,2)$.

(b) $f(x,y)=(\mathrm{sen}(x+y),\cos(x-y))$, $a=(\pi,-\pi/4)$.

(c) $f(x,y,z,t)=\left(\sqrt{y^2+z^2},\sqrt{x^2+z^2},x^2+y^2+z^2-9\,t^2\right)$, $a=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},3\right)$.

8) (Este ejercicio es relevante en el tema del paso a coordenadas polares en integrales dobles.) Sea $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ la función, definida por

$$V(r,\theta)=\big(x(r,\theta),y(r,\theta)\big),$$

$$\begin{cases} x(r,\theta) &= r\cos\theta,\\ y(r,\theta) &= r\sin\theta.\end{cases}$$

(a) Decidir si V es inyectiva. Demostrar que es sobreyectiva.
(b) ¿Es inyectiva la resticción de V al conjunto $\{(r,\theta):\quad r\geq 0,\ 0<\theta<2\pi\}$?
(c) Calcular la matriz jacobiana 2×2

$$DV(r,\theta)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}:=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{pmatrix}.$$

(d) Encontrar una simple expresión para el determinante $\det V(r,\theta) = \det \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}$ (que se denomina *el determinante jacobiano* del cambio V).

9) La matriz jacobiana y el determinante jacobiano del cambio a coordenadas esféricas. Se utiliza en integrales triples con cierta simetría esférica.
Este cambio viene dado al pasar de las coordenadas cartesianas $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ a (ρ,φ,θ), con $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ y $0 \leq \theta \leq \pi$, mediante las fórmulas:

$$x = \rho \cos\varphi \,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad y = \rho\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\theta\,, \qquad z = \rho\cos\theta\,.$$

Halla la matriz jacobiana $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)}$. Halla una expresión simple para su determinante.

10) Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones.

(j) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5$, (k) $f(x,y) = xy^2 + 2x^2y - 6xy$,
(l) $f(x,y) = 3y^2 + 4x^2 - 4xy + 2y + 4x$, (m) $f(x,y) = \frac{3}{5}x^5 - 3xy^2 + 3y$,
(n) $f(x,y) = 3 - x^2 - y^2 - x^4y^2$, (ñ) $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3xy$,
(o) $f(x,y) = e^{xy} + x^2$, (p) $f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

11) Para cada uno de los siguientes subconjuntos del plano, encuentra su frontera. Averigua, si son abiertos, cerrados, acotados y/o compactos.

(a) $A = \{(x,y) :\ x^2 + y^2 \leq 2\}$ (b) $B = \{(x,y) :\ x^4 + y^4 < 12\}$
(c) $C = \{(x,y) :\ x > 0,\, x^2 + y^2 \leq 9\}$ (d) $D = \{(x,y) :\ y \geq 0,\, x^2 + y^4 \leq 16\}$
(e) $E = \{(x,y) :\ x = y^2\}$ (f) $F = \{(x,y) :\ x > 0, (\log x)^2 + y^2 \leq 21\}$
(g) $G = \{(x,y) :\ x^3 + y^3 \leq -1\}$ (h) $H = \{(x,y) :\ x = y^2\}$.

12) Sea $f(x,y) = \dfrac{xy}{1 + x^2 + y^2}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Comprueba que la desigualdad $(x-y)^2 \geq 0$ implica que $|f(x,y)| < \frac{1}{2}$ para todo punto (x,y) en el plano. Halla todos los puntos críticos de f y clasifícalos. ¿Alcanza f el máximo y/o el mínimo en $\mathbb{R}^2$? Encuentra los máximos y mínimos locales y globales de f. Justifica todas las respuestas.

13) Una empresa de agricultura ecológica produce 12 toneladas mensuales de producto, de las que reserva una cantidad x para venta de productos frescos, una cantidad y para congelados y el resto para precocinados. Si la ganancia mensual neta de la empresa está dada, en miles de euros, por la expresión $30 + xy + xz + yz + x - z$, se pide:

a) Determina las cantidades x, y, z para que la ganancia mensual neta sea lo mayor posible.
b) ¿Cuál es la ganancia mensual neta más grande posible que tendrá la empresa?

14) Para guardar muestras se necesitan cajas de cartón, como las de zapatos, pero con la tapa de plástico. Cada cm^2 de cartón cuesta un céntimo de euro y cada cm^2 de plástico cuesta tres céntimos. Las cajas deben tener un volumen de 2000 cm^3. ¿Qué dimensiones tiene la caja más barata posible?

15) Se desea construir una balsa para lodos con forma de paralelepípedo rectángulo y con un volumen de 1 m^3. ¿Qué dimensiones debe tener para que la suma de la superficie lateral más la superficie del fondo (que son las que van recubiertas) sea mínima?

16) Hallar todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$. Averiguar si existen el máximo y el mínimo de esta función.

17) Comprobar que la función $f(x,y) = e^x \cos y$ no tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$.

18) Comprobar que la función $f(x,y) = x^2y^2$ tiene un mínimo absoluto en todos los puntos de los ejes x e y pero que, sin embargo, el criterio de la matriz Hessiana para los extremos locales es inútil porque no nos proporciona ninguna información en este caso.

19) Calcula los puntos de mínimo y máximo de $f(x,y) = 1 + xy - x - y$ en la región acotada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = 4$.

20) Halla los extremos de $f(x,y)$ sujetos a las restricciones indicadas:

(a) $f(x,y) = y^2 - 4x$, con la restricción $x^2 + y^2 = 9$,
(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, con la restricción $x^2 + y^2 = 1$,

21) Calcula el mínimo y el máximo de la función $f(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$ sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. Encuentra los puntos donde se alcanzan.

22) Halla todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = x + 2y$ sobre la curva $x^4 + y^4 = 1$. Demuestra que existen el mínimo y el máximo de esta función sobre esta curva. Calcula el mínimo, el máximo y los puntos donde se alcanzan.

23) Aplicando los polinomios de Taylor, calcula los límites

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5t^2) - \cos(4t^2)}{(\sin t)^4}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t) + \log(1-t) + t^2}{t^2(1-\cos t)}.$$

En (a), utilizar la siguiente propiedad: si $g(x) = o(x^n)$ cuando $x \to 0$ y k es un entero positivo, entonces $g(x^k) = o(x^{nk})$, $x \to 0$. Es un caso muy particular de la propiedad vista en clase.

Ejercicios adicionales sobre funciones de más de dos variables

24) Halla y clasifica los puntos críticos de las siguientes funciones de tres variables. Halla sus extremos.
(a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(c) $f(x,y,z) = x + \dfrac{y^2}{4x} + \dfrac{z^2}{y} + \dfrac{2}{z} \quad (x > 0, y > 0, z > 0)$.

25) Halla los extremos de $f(x,y,z)$ sujetos a las restricciones indicadas:

(c) $f(x,y,z) = xyz$, con la restricción $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$,
(d) $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4$, con la restricción $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

26) Demuestra que para todos los valores no negativos de x, y, z tales que $x + y + z = 1$, se tiene

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{1}{3}.$$

Indicación: Si pasamos a las variables x, y, sustituyendo $z(x,y) = 1 - x - y$, ¿qué valores pueden tomar estas dos variables? Buscar el máximo de la función $f(x,y) = \sqrt[3]{xyz}$ sobre este subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Comprueba primero que el máximo se alcanza.

27) Utiliza el resultado del ejercicio anterior para demostrar la desigualdad entre la media geométrica y la media aritmética

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}, \qquad x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.$$

Indicación: Aplica la desigualdad del ejercicio anterior a los números $x/t, y/t, z/t$, eligiendo $t > 0$ de forma adecuada.

28) ¿Cómo se debe dividir un segmento de longitud L en cuatro partes de modo que el producto de sus longitudes sea máximo?

29) Encuentra el valor máximo de la función $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ en la curva intersección del plano $x - y + z = 1$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 1$.