Ejercicios adicionales de Álgebra Lineal

1) Para las siguientes familias de vectores, averiguar si son lineamente independientes, si son generadoras y si son bases. En cada caso, encontrar subfamilias máximas de vectores linealmente independientes y calcular el rango de la matriz, cuyas columnas son estos vectores. Explicar, por qué la definición del rango a través de menores da los mismos resultados.

(a) $\{(0,0,1,0,1)^t, (1,2,1,1,1)^t, (1,-1,0,0,0)^t, (0,3,0,1,0)^t\} \subset \mathbb{R}^5$
(b) $\{(1,1)^t, (2,1)^t, (1,2)^t, (2,2)^t)\} \subset \mathbb{R}^2$
(c) $\{(0,1,1,1)^t, (1,0,1,1)^t, (1,1,0,1)^t, (1,1,1,0)^t\} \subset \mathbb{R}^4$
(d) $\{(0,1,1,1)^t, (1,0,1,1)^t, (1,1,0,1)^t, (1,1,1,0)^t, (1,1,1,1)^t\} \subset \mathbb{R}^4$
(e) $\{(1,2,3,4)^t, (5,6,7,8)^t, (9,10,11,12)^t, (13,14,15,16)^t\} \subset \mathbb{R}^4$.

2) Calcular el siguiente determinante directamente a partir de la definición.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Compobar el cálculo, utilizando el desarrollo en filas (o en columnas).

Cálculo

3) Encuentra el dominio de las siguientes funciones:
(a) $f(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{1-x^2}}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln x}$, (c) $f(x) = \ln(x - x^2)$, (d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$,

(e) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$, (f) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$, (g) $f(x) = \dfrac{3-x}{\operatorname{sen} x}$ (h) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^x$.

4) Halla el conjunto imagen de las siguientes funciones:
(a) $f(x) = x^2 - 3x$, (b) $f(x) = e^{2x}$, (c) $f(x) = \tan x$, (d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
Además, razona si son inyectivas y, para cada una de ellas, calcula la preimagen de $y = 0$, si existe. Interpreta geométricamente la inyectividad, así como la existencia de la preimagen de $y = 0$.

5) La gráfica de una función $f(x) = 2x^2 - bx + 1$ contiene el punto de coordenadas $(1, 7)$. Halla el valor de b.

6) Esboza la gráfica de una función con dominio $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$ que sea decreciente en $(-\infty, -2)$, convexa en $(-4, -2)$, tenga un punto de inflexión en $x = -4$, un máximo absoluto en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

7) Razona si son inyectivas, periódicas, pares o impares las siguientes funciones:
(a) $f(x) = |x - 1|$, $f(x) = \operatorname{sen}|x|$, $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x - 1$, $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$.

8) Sean $f(x) = 3x - 9$ y $g(x) = \frac{5}{x-3}$.
(a) Hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.
(b) Observar que $(g \circ f)(4)$ no está definido y explicar por qué. Hacer lo mismo con $(f \circ g)(3)$.
(c) Hallar el dominio de $g \circ f$ y de $f \circ g$.

9) Dadas las funciones $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ y $h(x) = x^2$, calcular $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$, y comprobar que ambas composiciones son iguales.

10) Si $f(x) = \mathrm{sen}(x)$ y $g(x) = 1 - x^2$, entonces una de las dos posibles composiciones $f \circ g$ ó $g \circ f$ coincide con la función $h(x) = \cos^2(x)$. ¿Cuál de ellas es?

11) Para cada apartado, decide si existe la función inversa de f y, en caso afirmativo, calcula esa función e indica su dominio de definición.

(a) $f(x) = \tan^2(x)$, $\mathrm{Dom}(f) = \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. (b) $f(x) = \mathrm{sen}(x)$, $\mathrm{Dom}(f) = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(c) $f(x) = x - x^2$, $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -1)$. (d) $f(x) = \tan^2(x)$, $\mathrm{Dom}(f) = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

12) Calcula los límites siguientes:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x}{x^2 - 4 + \log(x)}, \qquad \text{(b)} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-2}{x-1},$$

$$\text{(c)} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{2x^3 - 2x^2 + x + 3}, \quad \text{(d)} \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2+1}{3x^3+2x}.$$

13) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2 - \sqrt{2x^6+x^5}}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - x\right)$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1}$, (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$, (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, (k) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4}$, (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, (q) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$, (r) $\lim\limits_{x\to 0} e^{(-1/x^2)}$,

(s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x^{10}+48}$, (t) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^{18}+1}}$ (u) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2 x}{\sqrt{x+3}}$.

14) Encontrar un ejemplo de funciones f, g, definidas en $\mathbb{R}$, tales que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$

y para las que, sin embargo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x) + g(x)\big)$ no existe.

Indicación: Piensa primero en una función h que no tenga límite cuando $x \to +\infty$, y encuentra f y g en las condiciones anteriores de modo que $f + g = h$.

15) Calcula cuánto valen los límites siguientes:

$$\text{(a)} \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, \quad \text{(b)} \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}}.$$

Ayuda: Simplifica factores comunes.

16) Estudia el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \frac{5x-10}{x^2-2x}$, (b) $f(x) = \frac{x+1}{x}$, (c) $f(x) = \ln|x|$, (d) $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

(e) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, (f) $f(x) = \frac{x^2-x}{\sin(\pi x)}$, (g) $f(x) = \frac{x^4-4}{x^2+4x+4}$, (h) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

17) Calcula qué valor debe tener c para que la función $f(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{para } x \leq 1 \\ \ln x + c, & \text{para } x > 1 \end{cases}$ sea continua, y dibuja la gráfica de f para ese valor.