1) Usando el teorema de Rouché-Frobenius, discute y clasifica cada uno de los sistemas lineales que aparecen en la Hoja 3.

2) Calcular el número de inversiones de las siguientes permutaciones: [2 3 1 4]; [2 3 1]; [5 1 3 2 4]. Calcular su paridad.

3) Calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

¿Con qué permutación está relacionada? Calcula la paridad de esta permutación. Calcular $A^t, A \cdot A^t$ y A^{-1}. Calcular $\det A^t$.

4) Calcula el determinante de cada una de las matrices cuadradas que aparecen en la Hoja 3. ¿Cuáles son invertibles?

5) Calcular la matriz de cofactores de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Calcular la matriz inversa A^{-1}.
Indicación: se puede utilizar el algoritmo de Gauss.

6) Sea A una matriz 5×5, que tiene rango 3.
(a) ¿Es cierto que A tiene 3 columnas linealmente independientes? ¿Es cierto que A tiene 4 columnas linealmente independientes?
(b) Demostrar que la matriz de cofactores de A es nula.

7) Resolver, utilizando la regla de Cramer, los siguientes sistemas:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{rcr} 7x+y+6z &=& 1 \\ x-3y+4z &=& 1 \\ 5x+3y+z &=& -1 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{rcr} x+2y-z &=& 1 \\ x+3y+6z &=& -1 \\ 3x+5y+3z &=& 2 \end{array} \right. \qquad \text{(c)} \left\{ \begin{array}{rcr} 13x+3y &=& 2 \\ 4x-12y &=& -1 \end{array} \right.$$

8) Usando la fórmula para la inversa de una matriz, calcula la matriz inversa de cada una de las matrices cuadradas que aparecen en la Hoja 3 y que sean invertibles.

9) En cada uno de los siguientes casos, determina si el conjunto de vectores dado: (i) es linealmente independiente, (ii) si genera el espacio euclídeo correspondiente, y (iii) si es base del mismo:

(a) $\{(-1,1,0)^t, (0,2,0)^t, (3,1,1)^t\} \subset \mathbb{R}^3$ (b) $\{(-1,0)^t, (2,2)^t, (57,\pi)^t\} \subset \mathbb{R}^2$
(c) $\{(1,0,0,0)^t, (0,2,0,0)^t, (0,0,3,0)^t\} \subset \mathbb{R}^4$ (d) $\{(1,1,1)^t, (0,0,0)^t, (-1,1,1)^t\} \subset \mathbb{R}^3$

10) Determina si las bases $\alpha = \{(1,0,0)^t, (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^t, (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^t\}$, $\beta = \{(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0)^t, (-1, \frac{4}{3}, 0)^t, (0,0,1)^t\}$ y $\gamma = \{(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})^t, (0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})^t, (1,0,0)^t\}$ de $\mathbb{R}^3$ son ortonormales.

11) Calcula la ecuación del plano que pasa por el origen y que contiene los vectores:
(a) $(1,0,1)^t$ y $(1,-1,0)^t$ (b) $(0,0-2)^t$ y $(1,1,1)^t$ (c) $(-1,2,1)^t$ y $(3,0,1)^t$.
Para cada caso, calcula el plano paralelo al ya calculado pero que pasa por el punto $(1,0,2)^t$.

12) Dados los puntos $P = (1, 1, 3)$, $Q = (0, 0, 2)$ y $R = (1, 0, 1)$, determinar si están alineados (es decir, si están en una misma recta en el espacio). En caso negativo, halla el área del triángulo del que son vértices. Haz lo mismo para el caso $P = (-1, 2, 0)$, $Q = (-2, 0, 2)$ y $R = (0, 1, 1)$.

13) Halla tres vectores ortogonales al vector $(5, -3, 2)^t$. ¿Cuántos hay en total? ¿Dónde se encuentran?

14) Determinar la condición que deben verificar las coordenadas (x, y, z) de un punto P del espacio para que P equidiste de los puntos $A = (2, 0, -1)$ y $B = (0, 2, -1)$.

15) Representa graficamente y di qué tipo de cónicas y cuádricas son las dadas por las ecuaciones:

(a) $x^2 + y^2 = 3$ en $\mathbb{R}^2$	(b) $(x-2)^2 + y^2 = 4$ en $\mathbb{R}^2$	(c) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$
(d) $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 0$ en $\mathbb{R}^2$	(d) $4x^2 + (y-2)^2 = 4$ en $\mathbb{R}^2$	(e) $xy = 4$ en $\mathbb{R}^2$
(f) $2y^2 - x = 2$ en $\mathbb{R}^2$	(g) $y^2 - (x-2)^2 = 1$ en $\mathbb{R}^2$	(h) $x^2 - y^2 = 0$ en $\mathbb{R}^2$
(i) $x^2 + y^2 + (z-1)^3 = 1$ en $\mathbb{R}^3$	(j) $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 4$ en $\mathbb{R}^3$	(k) $(x-1)^2 + z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$
(l) $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$ en $\mathbb{R}^3$	(m) $(x-1)^2 + y^2 = z^2$ en $\mathbb{R}^3$	(n) $x^2 = 2y$ en $\mathbb{R}^3$
(o) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ en $\mathbb{R}^3$	(p) $z = x^2 + 4y^2$ en $\mathbb{R}^3$	(q) $x^2 - y^2 = z$ en $\mathbb{R}^3$.