1) Encontrar las factorizaciones de los siguientes polinomios en el producto de factores de grado 1 con coeficientes complejos:
(a) z^4+5z^2+6; (b) $z^3+iz^2+7z+7i$; (c) z^5-1; (d) z^8+2z^4+1; (e) $z^2+-3z+(3+i)$.
En cada caso, encontrar las raíces y sus respectivas multiplicidades.

2) Encontrar las factorizaciones de los siguientes polinomios con coeficientes reales en el producto de factores de grados 1 y 2 con coeficientes reales:
(a) z^3-z^2-5z-3; (b) z^4+5z^2+4; (c) z^4-5z^2+4; (d) $z^4+4z^3+6z^2+4z+1$;
(e) z^3-3z^2+z+5.
Encontrar todas las raíces complejas y sus multiplicidades.

3) Escribir los binomios de Newton hasta el grado 5. Calcular: $\binom{4}{1}$, $\binom{4}{2}$, $\binom{2000}{1}$, $\binom{10}{5}$.

4) Simplificar:
(a) $(z+1)^3+(z-1)^3$; (b) $(z+1)^6+(z-1)^6$; (b) $(z+1)^4+(z-1)^4+(z+i)^4+(z-i)^4$.

5) Usando el método de Gauss, clasifica los siguientes sistemas lineales y halla todas sus soluciones:

(a) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x-y-z+t &=& 2\\ 3x+y+2z &=& 3\\ 2y+2t &=& -4\\ x+4y+3z+t &=& -3 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcr} x_1-2x_2+x_3 &=& 7\\ 3x_1+2x_2-x_3 &=& 1\\ 2x_1-5x_2+2x_3 &=& 6 \end{array}\right.$

(c) $\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z+t &=& 0\\ y-z &=& 5\\ x+z+2t &=& 1\\ x+2y &=& 0 \end{array}\right.$ (d) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x_1-2x_2+x_3-2x_4 &=& 1\\ x_1+3x_2 &=& -1\\ 3x_1-x_3-x_4 &=& 0\\ 6x_1+x_2-3x_4 &=& 2 \end{array}\right.$

(e) $\left\{\begin{array}{rcr} 5x+2y-3z+t &=& -2\\ 2x+z-t &=& 1\\ 3x+2y-4z+2t &=& -3\\ 6x+4y-8z+4t &=& -6 \end{array}\right.$ (f) $\left\{\begin{array}{rcr} z_1+2z_2+3z_3 &=& 2\\ z_1-z_2+z_3 &=& 0\\ z_1+3z_2-z_3 &=& -2\\ 3z_1+4z_2+3z_3 &=& 0 \end{array}\right.$

6) Resuelve simultáneamente los siguientes sistemas lineales que sólo difieren en los terminos independientes:

(a) $\left\{\begin{array}{rcr|r} 2y_1-4y_2 &=& 10 & -8\\ y_1-3y_2+y_4 &=& -4 & -2\\ y_1-y_3+2y_4 &=& 4 & 9\\ 3y_1-4y_2+3y_3-y_4 &=& -11 & -15 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcr|r} 2x_1-4x_2 &=& 10 & -8\\ x_1-3x_2+x_4 &=& -4 & -2\\ x_1-x_3+2x_4 &=& 4 & 9 \end{array}\right.$

7) Escribe el sistema lineal correspondiente al problema de ajuste de cada una de las siguientes reacciones químicas, y resuélvelo:
(a) $CO_2+H_2O \to C_6H_{12}O_6+O_2$
(b) $C_2H_2Cl_4+Ca(OH)_2 \to C_2HCl_3+CaCl_2+H_2O$

8) Razona cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales y, para las que lo sean, calcula la correspondiente matriz:

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x+y-z$
(b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = (x,2)$
(c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2y, y^2, x)$
(d) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (0,0,|y|)$
(e) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x,y) = (2y, 3x, x+y, 0)$
(f) $f\colon \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z,t,r,s) = (0,0)$

9) Sean f y g dos aplicaciones lineales de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$.
(a) Demostrar que la aplicación $f+g$ es lineal.
(b) Sean F y G las matrices que corresponden a estas aplicaciones lineales. Demostrar que $F+G$ es la matriz que corresponde a $f+g$.

10) Sean $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ dos aplicaciones lineales y sean F y G las correspondientes matrices.
(a) Demostrar que la composición $g \circ f$ de estas dos aplicaciones es también lineal.
(b) ¿Qué tamaños tienen las matrices F y G? Comprobar que está definido el producto GF y que es la matriz que corresponde a la aplicación lineal $g \circ f$.

11) (a) Demostrar que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k = 0$ si n es par. ¿Cuánto vale esta suma si n es impar?
(b) Calcular el valor de la suma $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k \cdot k$, distinguiendo los casos de n par y n impar.

12) Clasifica las siguientes funciones, diciendo si son inyectivas, sobreyectivas, biyectivas o de ninguna de estas clases.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$
(c) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n+1$,
(d) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = n+1$,
(e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$
(f) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^{-x}$,
(g) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y, x^3)$
(h) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$.

13) (a) Encontrar una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, que sea sobreyectiva y no sea inyectiva.
(b) Encontrar una función de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$, que sea inyectiva y no sea sobreyectiva.
(c) Sea n un número natural y sea $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$. Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si f es inyectiva.
(d) Calcular el número de funciones biyectivas del conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ sobre este mismo conjunto. Considerar primero los casos de $n = 1,2,3$.

14) Escribe un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas que tenga como una de sus soluciones a $x = -1$, $y = 2$, $z = 1$, y que además admita otras soluciones.

15) Escribe un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas que tenga solución única.

16) Escribe un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas que no tenga solución.

17) Interpreta y representa geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones en el plano. Es decir, para cada sistema determina si las rectas definidas por cada una de las ecuaciones se intersecan, son coincidentes o son paralelas; si el sistema tiene más de dos ecuaciones, analiza qué pasa con cada par de rectas, y si hay algún punto que pertenezca a todas.

(a) $\left\{\begin{array}{rcr} -x+3y &=& -1 \\ 5x+2y &=& 0 \end{array}\right.$
(b) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+4y &=& 2 \\ x+2y &=& 1 \end{array}\right.$
(c) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+4y &=& 2 \\ x+2y &=& -3 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcr} 6x+4y &=& 2 \\ 3x+2y &=& -3 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right.$
(e) $\left\{\begin{array}{rcr} -x+4y &=& 1 \\ 3x+2y &=& -3 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right.$
(f) $\left\{\begin{array}{rcr} -x+2y &=& 2 \\ x+2y &=& 4 \\ 3x-y &=& -4 \end{array}\right.$

18) Interpreta geométricamente los siguientes sistemas de ecuaciones en el espacio tridimensional. Es decir, estudia las posiciones relativas de los planos definidos por cada una de las ecuaciones, indicando si son secantes, paralelos o coincidentes, e indicando si hay algún punto común a todos los planos. Haz un dibujo que represente lo que sucede en cada caso.

(a) $\left\{\begin{array}{rcr} -x+3y+z &=& -1 \\ 5x+2y-z &=& 0 \end{array}\right.$ (b) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+4y-6z &=& 2 \\ x+2y-3z &=& 1 \end{array}\right.$ (c) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+4y-6z &=& 2 \\ x+2y-3z &=& 0 \end{array}\right.$

(d) $\left\{\begin{array}{rcr} -x+3y+z &=& -1 \\ -x+3y+z &=& 1 \\ x+2y-5z &=& 0 \end{array}\right.$ (e) $\left\{\begin{array}{rcr} x+4y &=& 2 \\ x+2y-3z &=& 0 \\ z &=& 1 \end{array}\right.$ (f) $\left\{\begin{array}{rcr} 2x+3y &=& 2 \\ x-y &=& 0 \\ x+y &=& 0 \end{array}\right.$

(g) $\left\{\begin{array}{rcr} -x+y+z &=& 1 \\ -2x+2y+3z &=& 3 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right.$ (h) $\left\{\begin{array}{rcr} x+4y &=& 2 \\ -x-4y &=& 0 \\ -y-z &=& 0 \\ y+z &=& 1 \end{array}\right.$ (i) $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& 2 \\ y &=& 0 \\ x+y &=& 1 \\ z &=& 0 \end{array}\right.$

19) En cada uno de los siguientes casos decide si tienen sentido las siguientes expresiones: $A+B+C$, ABC y $A+BC$. Realiza los cálculos en los casos en los que puedan hacerse.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

20) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcular AX, A^2X, A^3X, X^tA, X^tX, XX^t y $2XX^t + 3A$. Comprueba que $X^tA^t = (AX)^t$ y $A(XX^t + A) = AXX^t + A^2$.

21) Calcula $A^2 = AA$, $A^3 = AAA$, y en general $A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n \text{ veces}}$ para las siguientes matrices A:

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

22) Demuestra que, si A es una matriz cuadrada, entonces $A + A^t$ es simétrica y $A - A^t$ es antisimétrica. Usando que $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$ observa que toda matriz cuadrada es suma de una matriz simétrica y una antisimétrica.

23) Calcula, si existe, la inversa de las siguientes matrices usando el método de Gauss:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & -4 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 1 & -4\sqrt{-3} \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} a+2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ para cada $a \in \mathbb{R}$.