

Examen final

13 de junio de 2019

Tiempo disponible: 3 horas.

Curso 2018/2019

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ GRUPO: _____ DNI: _____

Son 7 ejercicios. Se sumarán las 5 mejores notas. Todas las respuestas tienen que estar justificadas.

--	--	--	--	--	--	--	--

1) (2 puntos)

(a) Demuestra que un número complejo z satisface la ecuación $|z - 1| = |z + 1|$ si y solo si su parte real es nula.

(b) Obtén todas las raíces de la ecuación

$$z + \frac{1}{z} = a$$

para los valores del parámetro $a = 3/2$ y $a = -3i$. Demuestra que para cualquier valor complejo de a , la ecuación no tiene más que dos soluciones.

(c) ¿Para qué valores del parámetro a , la ecuación tiene la raíz $-1 + \frac{1}{3}i$?

2) (2 puntos)

(a) Explica, si existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 4 \cos x + \cos 2x}{x^4}$, y calcúlalo en este caso.

(b) Calcula la derivada de la función $f(x) = \log^3(1 + e^{-2x})$.

(c) Calcula la integral indefinida $\int \frac{10x - 1}{x^2 + 6} dx$.

3) (2 puntos) Una empresa dispone de $3m^2$ de lámina metálica para fabricar una papelera en forma de prisma de base cuadrada. Se pide:

(a) Obtén las dimensiones para las cuales se maximiza el volumen de la papelera, empleando todo el material y tomando en cuenta que la papelera no tiene ningún tipo de tapa pero sí tiene fondo.

Indicación: Se puede reducir a la optimización de una función de una sola variable.

(b) Uno de los ingenieros responsables del diseño de producto cree que la fabricación de papeleras cilíndricas es más eficaz. Justifica si, con la misma cantidad de material, puede superarse el volumen obtenido en el apartado anterior empleando un diseño cilíndrico, de nuevo sin tapa superior.

(continúa en el dorso)

4) (2 puntos) Se consideran las siguientes tres funciones:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x + 2x; \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x - 2x; \quad h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, h(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x)^t.$$

(a) Dibuja las gráficas de las funciones f y g e investiga su comportamiento: intervalos de monotonía y de convexidad/concavidad, posibles puntos de inflexión, límites en $\pm\infty$, etc. Calcula las imágenes $f(\mathbb{R})$ y $g(\mathbb{R})$.

(b) ¿Es lineal la función (aplicación) $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$? Si es así, calcula su matriz. Si $(a, b, c)^t \in \mathbb{R}^3$ es un vector de datos, escribe la ecuación $h(x, y, z) = (a, b, c)^t$ como un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

(c) ¿Es cierto que este sistema tiene al menos una solución para cualquier vector de datos $(a, b, c)^t$? ¿Es cierto que el correspondiente sistema homogéneo tiene solo solución trivial?

¿Es cierto que para cualquier vector de datos $(a, b, c)^t$, el sistema tiene una única solución?

(d) Escribe las definiciones de funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. ¿Es cierto que alguna de estas propiedades implica otra?

(e) Para cada una de las funciones f, g, h , decide si son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

5) (2 puntos)

(a) Halla y clasifica los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2 + \frac{7}{2}y^4 - 3x + 7xy$.

(b) Averigua si esta función alcanza el máximo y/o el mínimo globales en \mathbb{R}^2 y explica, por qué. Cálculalos, si es el caso.

Observación: Se permite utilizar el resultado del siguiente apartado.

(c)* Representando la función como

$$f(x, y) = \left[\frac{7}{2}y^4 + \left(x + \frac{7}{2}y\right)^2 \right] - \left[\frac{7^2}{2^2}y^2 + 3x \right],$$

demuestra que $\lim_{\|(x,y)\| \rightarrow \infty} f(x, y) = +\infty$.

6) (2 puntos) Consideremos el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ y la función de dos variables

$$f(x, y) = x^2 + \sqrt{3}xy, \quad (x, y) \in A.$$

(a) Determinar si A es abierto, cerrado, acotado y/o compacto.

(b) ¿Es cierto que la función f alcanza su máximo y/o mínimo absolutos en A ? En caso afirmativo, calcúlalos.

7) (2 puntos)

(a) Sea D la región acotada por la recta $y = x$ y la curva $y = x^2$. Calcula la integral doble

$$\iint_D x e^y dx dy.$$

(b) Calcula la integral

$$\iint_B (x^2 + y^2)^{2019} dx dy,$$

donde el conjunto B está definido por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 1; y \geq 0$.