Matemáticas I Grado en Ingeniería Química

Examen final
10 de enero de 2019
Tiempo disponible: 3 horas. Curso 2018/2019

Apellidos: ______________________________

Nombre: ____________________ Grupo: ________ DNI: ______________

Para sacar la máxima nota, basta dar respuestas completas a 5 de los 6 problemas.

1) (2 puntos) (a) Demuestra que un número complejo z satisface la ecuación $|z-i| = |z+i|$ si y solo si z es real.
(b) Aplica el apartado (a) para demostrar que todas las raíces de la ecuación

$$(z-i)^7 = (z+i)^7 \tag{$*$}$$

son reales.
(c) ¿Cuántas raíces tiene la ecuación (*)? Calcúlalas, utilizando las raíces séptimas de números complejos. ¿Qué multiplicidades tienen?
(d) Separa la parte real y la parte imaginaria en la expresón encontrada en (c), dando una demostración alternativa de que todas las raíces de (*) son reales.

2) (2 puntos) Se considera la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como

$$f(x,y,z) = (x,y,z)^t \times (1,2,3)^t,$$

donde $\vec{a} \times \vec{b}$ denota el producto vectorial de vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$.

(a) Expresa f en coordenadas. Comprueba que es lineal y calcula su matriz C.

(b) Escribe las ecuaciones

$$(A)\ f(x,y,z) = (1,1,-1)^t; \qquad (B)\ f(x,y,z) = (1,0,1)^t$$

como sistemas de ecuaciones lineales respecto de x, y, z. Para cada uno de estos dos sistemas de ecuaciones, encuentra su solución general.

(c) Sean $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ las 3 columnas de la matriz C, calculada en (a). Decide si son linealmente independientes, si son una familia generadora y si son una base de $\mathbb{R}^3$. Responde a las mismas preguntas respecto de la familia de 4 vectores $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$, $\vec{c}_3$ y $(1,1,1)^t$.

3) (2 puntos) (a) En el plano $\mathbb{R}^2$, se considera el conjunto

$$K = \{(x,y) : \quad \frac{x^2}{9} + y^2 \le 1\}.$$

Dibuja este conjunto y explica, si es acotado, abierto y/o cerrado.

(b) Sea f la función $f(x,y) = xy^2 - \frac{2}{3}x$. Utilizando la respuesta a la pregunta anterior, ¿se puede afirmar que f alcanza el mínimo y/o el máximo global sobre K?

(c) Encuentra los puntos críticos de f en el interior del conjunto K y en su borde.

(d) Utilizando la matriz hessiana, clasifica los puntos críticos del interior de K (mínimo local, máximo local, punto de silla). En el caso de existir, calcula el máximo y el mínimo de f sobre K.

4) (2 puntos) Sea D la región acotada por los ejes x e y y la curva $y = 1 - x^3$. Calcula la integral doble

$$\iint_D \frac{x^2}{(1+y)^2}\, dx\, dy.$$

5) (2 puntos) Calcula la integral

$$\iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^2+1}\, dx\, dy,$$

donde la figura B está definida por las desigualdades $x^2 + y^2 \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

6) (2 puntos) **(a)** Explica, si existe el límite $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3 - 4\cos x + \cos 2x}{x^4}$, y calcúlalo en este caso.

(b) Calcula la derivada de la función $f(x) = \log^3(1 + \log^4 x)$.

(c) Calcula la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{(x+1)\, dx}{x^2+1}$.

1)

a) $|z+i| = |z-i| \iff |z+i|^2 = |z-i|^2$

$\iff |z|^2+1-2\,\mathrm{Re}\{iz\} = |z|^2+1+2\,\mathrm{Re}\{iz\}$

$\iff \mathrm{Im}\, z = -\mathrm{Im}\, z \iff z \in \mathbb{R}$

b) $(z+i)^7 = (z-i)^7 \Rightarrow |z+i|^7 = |z-i|^7 \Rightarrow |z+i| = |z-i|$

$\underset{a)}{\Rightarrow}$ Todas las raíces de $(*)$ son reales.

c) La ecuación $(*)$ tiene 6 raíces.

$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^7 = 1 \Rightarrow \frac{z+i}{z-i} = \overset{\neq 1}{\alpha_k}$, $\alpha_k = e^{i\frac{2\pi k}{7}}$, $k \in \{1, \dots, 6\}$

$z_k = -i\,\frac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k}$

$k \in \{1, \dots, 6\}$

d) $z_k = -i\,\dfrac{1+\alpha_k}{1-\alpha_k} = -i\,(1+\alpha_k)\,\dfrac{1-\overline{\alpha_k}}{|1-\alpha_k|^2}$

$= \dfrac{2\,\mathrm{Im}\,\alpha_k}{|1-\alpha_k|^2} \qquad k \in \{1,\dots,6\}$

2/

a)

$$f(x,y,z) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (3y-2z,\ z-3x,\ 2x-y)^t$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

b)

$|C| = -6+6 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$

$\Rightarrow \mathrm{rg}\, C = 2$

A) $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$C^* = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3+6-9=0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -4-2+6=0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3+2+1=0$$

$|C|=0$

$\Rightarrow rg\ C^* < 3$, $rg\ C^* \geq 2$

$\xRightarrow[R-F]{}$ El sistema es compatible indeterminado

$z = \lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2\lambda \\ 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x = \dfrac{\lambda-1}{3} \\ y = \dfrac{1+2\lambda}{3} \end{array}$$

B) $C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3+9=12 \neq 0 \Rightarrow rg\ C^* = 3$$

$\xRightarrow[R-F]{}$ El sistema es incompatible.

c)

Puesto que $|C| = 0$, $\vec{c_1}$, $\vec{c_2}$ y $\vec{c_3}$ no son l. independientes.

Puesto que el sistema $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ es incompatible, no $\vec{c_1}$, $\vec{c_2}$ y $\vec{c_3}$ no son un sistema de generadores.

Puesto que $\vec{c_1}$, $\vec{c_2}$ y $\vec{c_3}$ no son l. indep. (ni generadores), no son base de $\mathbb{R}^3$.

Denotemos $\vec{c_4} := (1,1,1)$

Puesto que $\vec{c_1}$, $\vec{c_2}$ y $\vec{c_3}$ son l. dependientes, $\vec{c_1}, \vec{c_2}, \vec{c_3}$ y $\vec{c_4}$ son l. dependientes. Por tanto, no son base de $\mathbb{R}^3$.

Veamos que $\vec{c_1}, \vec{c_2}$ y $\vec{c_4}$ son base de $\mathbb{R}^3$ para comprobar que $\vec{c_1}, \vec{c_2}$, $\vec{c_3}$ y $\vec{c_4}$ son un sistema de generadores de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \vec{c_1} & \vec{c_2} & \vec{c_4} \end{array} \end{array} = 3+6+9 = 18 \neq 0 \Longrightarrow$$

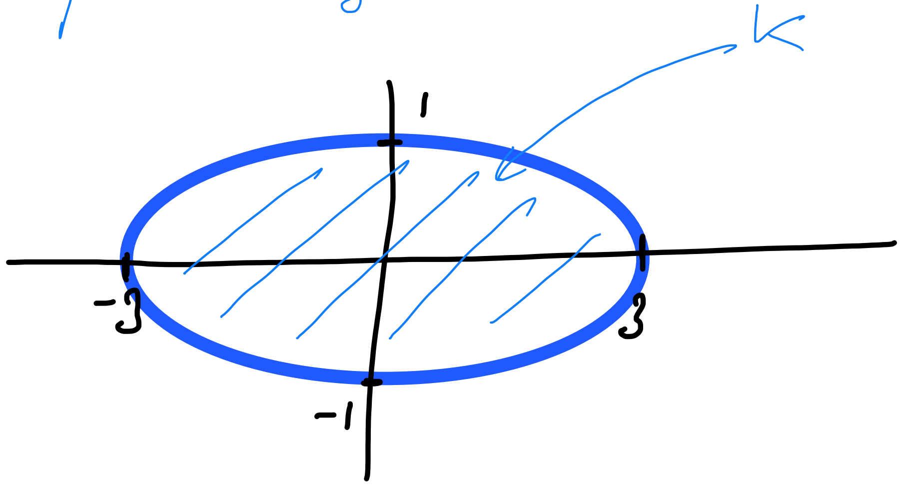
$(\vec{c_1}|\vec{c_2}|\vec{c_4})\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{v}$ es un sistema compatible determinado $\forall v \in \mathbb{R}^3$

$\Longrightarrow \vec{c_1}, \vec{c_2}$ y $\vec{c_4}$ son base de $\mathbb{R}^3$.

3)

a) $K = \{ (x,y) : \frac{x^2}{9} + y^2 \leq 1 \}$

K es una elipse centrada en el origen con semiejes 3 y 1.



K es acotado, pues

$$\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \leq 9 \left(\frac{x^2}{9} + y^2 \right) \leq 9, \quad \forall (x,y) \in K.$$

Claramente K es cerrado, pues contiene a su frontera.

b) K es compacto.

$f(x,y) = xy^2 - \frac{2}{3}x$ es un polinomio $\Rightarrow$ continua en K

$\xrightarrow[\text{Weierstrass}]{}$ f alcanzará su máximo y su mínimo global en K.

c) y d)

Interior

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2 - \frac{2}{3}, 2xy\right)$$

$$\Longrightarrow \nabla f = 0 \iff x = 0 \ , \ y = \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2\frac{\sqrt{6}}{3} \\ 2\frac{\sqrt{6}}{3} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{8}{3} \Longleftarrow$$ Autovalores de distinto signo

$\Longrightarrow$ Simetría $\left(0, \pm\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ son dos puntos de silla.

Frontera $\quad \frac{x^2}{9} + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{x^2}{9} \quad -3 \leq x \leq 3$

$$F(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{9}\right) - \frac{2}{3}x = \frac{x}{3}\left(1 - \frac{x^2}{3}\right)$$

$$F'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^2 \Rightarrow \left(F'(x) = 0 \iff x = \pm 1\right)$$

$$F''(x) = -\frac{2}{3}x \Longrightarrow$$ $x = 1$ es un máximo local, $x = -1$ es un mínimo local

$F(3) = -2$

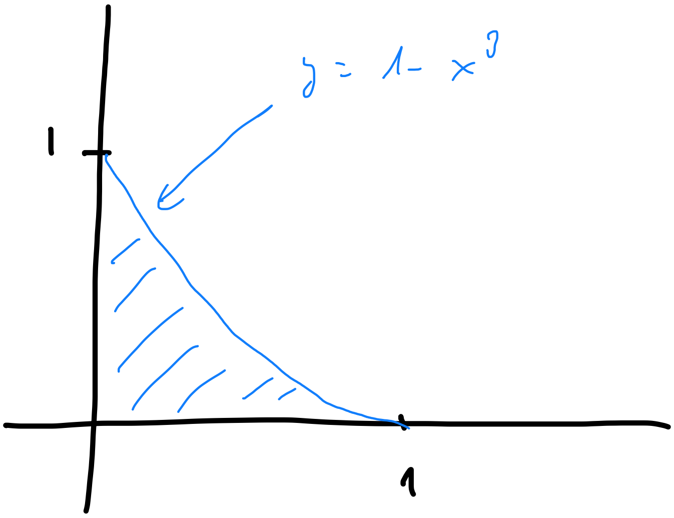
$F(-3) = 2$

$F(1) = \frac{2}{9}$

$F(-1) = -\frac{2}{9}$

$\Longrightarrow$ Simetría: $(3,0)$ es mínimo global, $(-3,0)$ es máximo global

4)



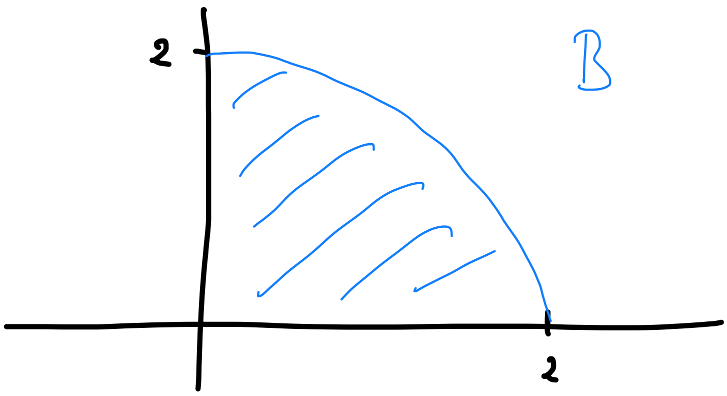
$$\iint_D \frac{x^2}{(1+y)^2}\,dx\,dy = \int_0^1\left(\int_0^{1-x^3}\frac{x^2}{(1+y)^2}\,dy\right)dx$$

$$= \int_0^1 x^2\left(\int_0^{1-x^3}\frac{1}{(1+y)^2}\,dy\right)dx$$

$$= -\int_0^1 x^2\,\frac{1}{1+y}\Big|_0^{1-x^3}dx = -\int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2-x^3}-1\right)dx$$

$$= \frac{\ln(2-x^3)}{3}\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1-\ln(2)}{3}$$

5)



$$\iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^2+1}\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{(x^2+y^2)^2+1}\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 x \arctan(x^2+y^2)\Big|_0^{\sqrt{4-x^2}}\,dx$$

$$= \arctan 4 - \frac{1}{2}\int_0^2 x\arctan(x^2)\,dx$$

$$\underset{s=x^2}{=} \arctan 4 - \frac{1}{4}\int_0^4 \arctan(s)\,ds = \circledast$$

$$u = \arctan s \Rightarrow du = \frac{1}{1+s^2}\,ds$$

$$dv = ds \longrightarrow v = s$$

$$\int \arctan(s)\,ds =$$

$$= s\arctan s - \int \frac{s}{1+s^2}\,ds$$

$$= s\arctan s - \frac{1}{2}\ln(1+s^2) + k$$

$$\circledast = \arctan 4 - \left(\arctan 4 - \frac{1}{8}\ln(17)\right)$$

$$= \frac{1}{8}\ln 17$$

También pueden usarse coordenadas polares

$$\iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^2+1}\,dx\,dy = \quad \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\,\mathrm{sen}\,t \end{array}$$

$$\int_0^2 \int_0^{\pi/2} \frac{r^2 \cos t\,\mathrm{sen}\,t}{r^4+1}\, r\,dt\,dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{r^3}{r^4+1}\,dr \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(2t)\,dt$$

$$= \frac{1}{8}\ln(17)$$

6)

a) $$\lim_{x\to 0} \frac{3-4\cos x + \cos 2x}{x^4} = \frac{0}{0}$$

$$\overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{4\,\mathrm{sen}\,x - 4\,\mathrm{sen}\,x\cos x}{4x^3}$$

$$1-\cos x \sim_0 \frac{x^2}{2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\mathrm{sen}\,x \sim_0 x$

b) $$f'(x) = 3\log^2(1+\log^4 x)\cdot\frac{1}{1+\log^4 x}\cdot 4\log^3 x\cdot\frac{1}{x}$$

c) $$\int \frac{x+1}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \arctan(x) + k$$