

Ensayo del exámen final
18 de diciembre de 2018.

Tiempo disponible: 2 horas 20 minutos.

Curso 2018/2019

APELLIDOS: _____

NOMBRE: _____ GRUPO: _____ DNI: _____

--	--	--	--	--	--

1) (2 puntos) Se consideran las aplicaciones $f, g, h, k : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas como

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= (x^2, 1, -1)^t, & g(x, y, z) &= (y + z, 0, 0)^t, \\ h(x, y, z) &= f(x, y, z) \times g(x, y, z), & k(x, y, z) &= (y + z, x + z, x + y)^t, \end{aligned}$$

donde $\vec{a} \times \vec{b}$ denota el producto vectorial de vectores \vec{a} y \vec{b} .

(a) Expresa $h(x, y, z)$ en coordenadas y comprueba que g, h, k son aplicaciones lineales, mientras que f no lo es.

(b) Calcula las matrices de las aplicaciones g, h, k y $g + h$. Explica, cuáles de estas aplicaciones son inyectivas, sobreyectivas y/o biyectivas.

(c) Explica, cómo, sabiendo las matrices de dos aplicaciones lineales, puede uno calcular la matriz de su composición. Utilizando esta regla, calcula las matrices de las aplicaciones $h \circ k$ y $k \circ h$.

2) (2 puntos) (a) Calcula las raíces complejas de la ecuación $z^2 - 4z + 8 = 0$.

(b) Utiliza este cálculo para hallar todas las raíces complejas de la ecuación $t^6 - 4t^3 + 8 = 0$ y expresarlas en forma exponencial.

Di, cuántas son y cuáles son sus multiplicidades. ¿Cuántas de ellas son reales?

Indicación: Haz la sustitución $t^3 = z$.

(c) Demuestra que toda raíz de la ecuación $t^6 - 4t^3 + 8 = 0$ es a la vez 24-ava raíz de 4096 ($= 2^{12}$).

3) (2 puntos) (a) Halla y clasifica los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) = x^4 + 2y^4 + 4xy^2.$$

(b) Averigua si esta función alcanza el máximo y/o el mínimo global en \mathbb{R}^2 y explica, por qué. Si es el caso, calcúlalos y calcula los puntos, donde se alcanzan.

4) (2 puntos) Sea D la región acotada por la parábola $y = 2x^2$ y la recta $y = 2$. Calcula la integral doble

$$\iint_D x^2 y \, dx \, dy,$$

reduciéndola a la integral iterada de las dos formas distintas.

5) (2 puntos) (a) Explica, si existen los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\log(1+x))^4}{(\sin x)^4}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\log(1+x))^4}{(\sin x)^4},$$

y calcúlalos si es el caso. Recordamos que \log significa el logaritmo neperiano.

(b) Calcula la derivada de la función $f(x) = \log(x + \sqrt{3+x^2})$, simplificándola lo más posible.

(c) Calcula la integral indefinida $\int \cos(x)e^{-x} \, dx$.