

Examen parcial II

12 de diciembre de 2018

Tiempo disponible: 1 hora 25 minutos.

Curso 2018/2019

Apellidos _____ Nombre _____ Grupo _____

1) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Escribe la definición del determinante de una matriz $n \times n$ en términos de permutaciones de n elementos. Aplícala para calcular los determinantes de las matrices A y B . Demuestra que para todo t real,

$$\det(A + tB) = 1 + t^5.$$

(b) Sean $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_5$ las 5 columnas de la matriz $A+B$. Determina si son linealmente independientes, si forman una base de \mathbb{R}^5 y si son un sistema generador. Calcula el rango de la matriz $A+B$. Determina si la aplicación lineal de \mathbb{R}^5 a \mathbb{R}^5 que corresponde a esta matriz, es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

(c) Responde a las preguntas anteriores acerca de la matriz $A-B$ y los vectores $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_5$, que son sus 5 columnas. Encuentra una subfamilia máxima de vectores linealmente independientes.

2) (a) En el plano \mathbb{R}^2 , se considera el conjunto

$$E = \{(x, y) : x^2 + 4y^2 \leq 1\}.$$

Dibuja este conjunto y explica, si es acotado, abierto y/o cerrado.

(b) Queremos buscar mínimos y máximos locales y globales de la función $f(x, y) = x^3 - x + y^2$ sobre el conjunto E . Utilizando la respuesta a la pregunta anterior, ¿se puede afirmar que f alcanza el mínimo y/o el máximo global sobre E ?

(c) Encuentra los puntos críticos de f en el interior del conjunto E y en su borde.

(d) Utilizando la matriz hessiana, clasifica los puntos críticos del interior de E (mínimo local, máximo local, punto de silla). En el caso de existir, calcula el máximo y el mínimo de f sobre el conjunto E .

3) (a) Explica, si existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\sin^4 x + \sin^5(x)}$, y calcúlalo en este caso.

(b) Calcula la derivada de la función $f(x) = \arctan \sqrt{x^2 - 1}$, simplificándola lo más posible.

(c) Calcula la integral indefinida $\int e^{-3\sqrt{x}} dx$.