

Examen parcial I

5 de noviembre de 2018.

Tiempo disponible: 1 hora 40 minutos.

Curso 2018/2019

1) Se consideran las aplicaciones  $f, g, h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , definidas como

$$f(\vec{x}) = \vec{x} \times \vec{a}, \quad g(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{b} \rangle (\vec{x} \times \vec{c}), \quad h(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \vec{c} \rangle \vec{b} \quad (\vec{x} \in \mathbb{R}^3),$$

donde  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  son los siguientes vectores en  $\mathbb{R}^3$ :  $\vec{a} = (0, 1, 1)^t$ ,  $\vec{b} = (1, 0, 1)^t$ ,  $\vec{c} = (0, 0, 1)^t$ .

(a) Expresa  $f(x_1, x_2, x_3)$ ,  $g(x_1, x_2, x_3)$ ,  $h(x_1, x_2, x_3)$  en coordenadas. Calcula también las aplicaciones  $f + g$ ,  $f \circ h$ ,  $h \circ f$ .

(b) ¿Cuáles de las aplicaciones  $f, g, h, f + g, f \circ h, h \circ f$  son lineales? En estos casos, calcula las correspondientes matrices. Escribe la definición general de la matriz de una aplicación lineal de  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{R}^m$ .

2) Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Escribe la definición del determinante de una matriz  $n \times n$  en términos de permutaciones de  $n$  elementos. Aplícala para calcular los determinantes de las matrices  $A$  y  $B$ .

(b) Sean  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$  las columnas de la matriz  $A - BA$ . Determina si son linealmente independientes, si forman una base de  $\mathbb{R}^4$  y si son un sistema generador. Calcula el rango de la matriz  $A - BA$ . Determina si la aplicación lineal de  $\mathbb{R}^4$  a  $\mathbb{R}^4$ , que corresponde a esta matriz, es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva.

(c) Calcula la matriz  $(A + 2B)^{-1}$  y el determinante  $\det(A + 2B)$ .

3) (a) Resuelve la ecuación

$$P(z) = 0,$$

donde  $P(z) = (z + i)^3 - z^3 - 3 - 2i$ . ¿Cuántas raíces tiene? Escribe la correspondiente factorización del polinomio  $P(z)$  en factores de grado 1 (con coeficientes complejos).

(b) Escribe la fórmula para las raíces 11-avas de 1. Utilízala para encontrar todas las raíces del polinomio

$$Q(z) = (z + i)^{11} - z^{11}.$$

¿Cuántas son? ¿Cuántas de ellas son reales? ¿Qué multiplicidades tiene cada una de ellas? Escribe la correspondiente factorización del polinomio  $Q(z)$  en factores de grado 1.

4) (a) Explica, si existe el límite  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{100} + \log(3x)}{4x^{100} + \log(2x)}$ , y calcúlalo en este caso.

(b) Calcula la derivada de la función  $f(x) = e^{2 \arctg(5x)}$ .

(c) Calcula la integral indefinida  $\int x^2 \cos(x^3) dx$ .