1)

a)

$$|z-1| = |z+1| \iff |z-1|^2 = |z+1|^2 \iff (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1)$$

$$\iff |z|^2 + 1 - 2\operatorname{Re} z = |z|^2 + 1 + 2\operatorname{Re} z \iff \operatorname{Re} z = 0.$$

$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$

b)

b.1)

$$z + \frac{1}{z} = \frac{3}{2} \overset{z\neq 0}{\iff} 2z^2 - 3z + 2 = 0$$

$$\Rightarrow z = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2} \quad z_1 = \frac{3+\sqrt{7}i}{4}, \quad z_2 = \frac{3-\sqrt{7}i}{4}$$

b.2)

$$z + \frac{1}{z} = -3i \overset{z\neq 0}{\iff} z^2 + 3iz + 1 = 0$$

$$z = \frac{-3i \pm \sqrt{(3i)^2 - 4}}{2} = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}i, \quad -\frac{3+\sqrt{13}}{2}i$$

b.3)

Si $a \in \mathbb{C}$ y z_0 verifica que $z_0 + \frac{1}{z_0} = a$, entonces $z \neq 0$ y así $z_0^2 - az_0 + 1 = 0$, con lo que es una raíz del polinomio $P(z) = z^2 - az + 1$, que a lo sumo tiene dos raíces distintas.

b.4) Si queremos que $-1 + \frac{1}{3}i$ sea una raíz,

$$a = -1 + \frac{1}{3}i + \frac{1}{-1+\frac{1}{3}i} = \frac{\left[\left(-1+\frac{1}{3}i\right)^2 + 1\right]\left(-1-\frac{1}{3}i\right)}{\left|-1+\frac{1}{3}i\right|^2} = -\frac{19}{10} + \frac{i}{30}.$$

$z\bar{z} = |z|^2$

2)

a) Recordemos que $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots$

$$\Rightarrow 3 - 4\cos x + \cos 2x = 3 - 4\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^{2n}}{(2n)!}\right)$$

$$= -4\frac{x^4}{4!} + \frac{2^4 x^4}{4!} + o(x^4) = \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

Términos de grado superior

$$\lim_{x \to 0} \frac{3 - 4\cos x + \cos 2x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{2}.$$

b)

$$f'(x) = 3\log^2(1 + e^{-2x}) \cdot \frac{1}{1 + e^{-2x}} \cdot e^{-2x} \cdot (-2)$$

c)

$t = \frac{x}{\sqrt{6}} \Rightarrow dt = \frac{dx}{\sqrt{6}}$

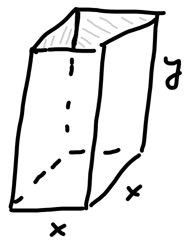
$$\int \frac{10x - 1}{x^2 + 6}\, dx = \frac{1}{6}\int \frac{10x - 1}{\frac{x^2}{6} + 1}\, dx =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{10\sqrt{6}\,t - 1}{t^2 + 1}\, dt = 10\int \frac{t}{t^2 + 1}\, dt - \frac{\sqrt{6}}{6}\int \frac{1}{t^2 + 1}\, dt$$

$$= 5\log(t^2 + 1) - \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan(t) + k = 5\log\left(\frac{x^2}{6} + 1\right) - \frac{\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{6}}\right) + k.$$

3)

a)



Restricción de material

$3 = x^2 + 4xy \overset{x \neq 0}{\Longrightarrow} y = \dfrac{3-x^2}{4x}, \quad 0 < x < \sqrt{3}$

$V_p(x,y) = x^2 y \Longrightarrow V_p(x) = x^2 \dfrac{3-x^2}{4x} = \dfrac{1}{4} x(3-x^2)$

Función continua en $[0,\sqrt{3}]$, que es compacto, y por tanto alcanza su máximo

$V_p'(x) = \dfrac{3}{4}(1-x^2)$

V_p': 0 $+$ 1 $-$ $\sqrt{3}$

V_p: $\nearrow$ Máx $\searrow$

V_p alcanza su máximo en $x = 1$.

$V(1) = \dfrac{1}{2}\ m^3$ es el volumen máximo con este diseño.

b)

Restricción de material

$3 = \pi r^2 + 2\pi r h \overset{r \neq 0}{\Longrightarrow} h = \dfrac{3-\pi r^2}{2\pi r}, \quad 0 < r < \sqrt{\dfrac{3}{\pi}}$

$V_c(r,h) = \pi r^2 \cdot h \Longrightarrow V_c(r) = \pi r^2 \dfrac{3-\pi r^2}{2\pi r} = \dfrac{1}{2} r(3-\pi r^2)$

Continua en $\left[0, \sqrt{\frac{3}{\pi}}\right]$, compacto, con lo que alcanza su máx.

$V_c'(r) = \dfrac{3}{2}(1-\pi r^2)$

V_c': 0 $+$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ $-$ $\sqrt{\frac{3}{\pi}}$

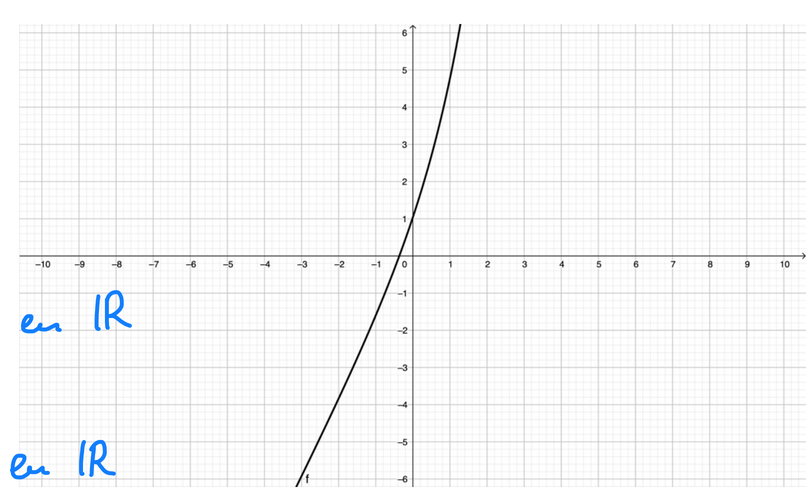
V_c: $\nearrow$ $\searrow$

V_c alcanza su máximo en $r = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$.

$V_c\left(\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} m^3 > \dfrac{1}{2} m^3$, y por tanto el diseño cilíndrico es más eficiente.

4)

a)



$f(x) = e^x + 2x$

$f'(x) = e^x + 2 > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ crece en $\mathbb{R}$

$f''(x) = e^x > 0, \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ convexa en $\mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) - 2x = 0$

Asíntota oblicua en $-\infty$.

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\overset{}{\underset{\text{Bolzano}}{\Longrightarrow}} f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$g(x) = e^x - 2x$

$g'(x) = e^x - 2 \Rightarrow$

g'	$-$		$+$
g	$\searrow$	$\ln 2$	$\nearrow$

g decrece en $(-\infty, \ln 2)$

g crece en $(\ln 2, \infty)$

g tiene un mínimo (abs.) en $x = \log 2$

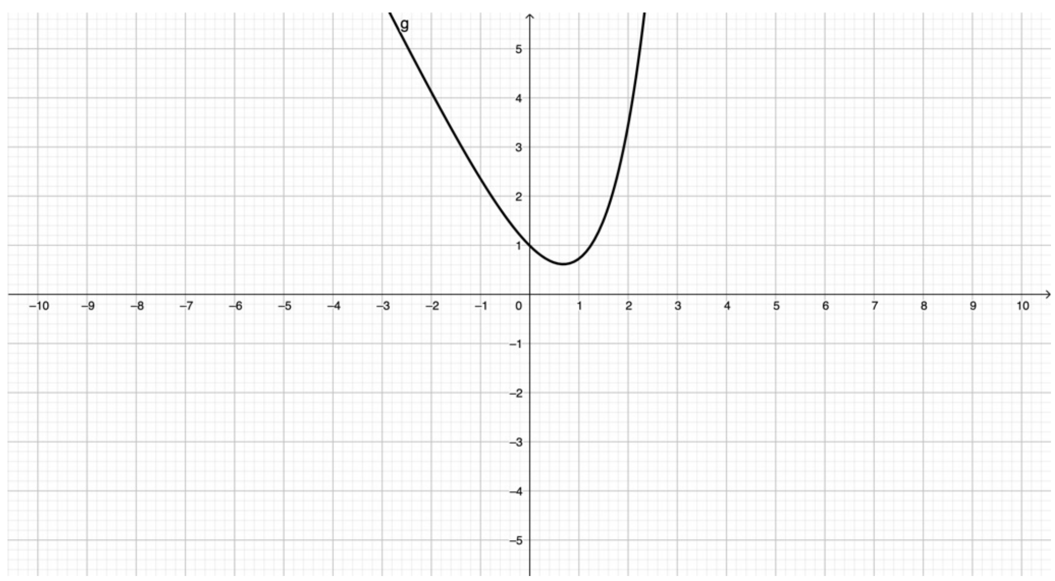
$g''(x) = e^x > 0 \Rightarrow g$ siempre es convexa

$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = -2 \\ \lim_{x \to -\infty} g(x) + 2x = 0 \end{array}\right\}$ Asíntota oblicua en $-\infty$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty.$

Por lo visto anteriormente, $g(\mathbb{R}) = [2 - 2\log 2, \infty)$.



b) $h(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es lineal, con matriz asociada C

$h(0,1,0)$

$h(1,0,0)$ $h(0,0,1)$

$h(x,y,z) = (a,b,c)^t \Leftrightarrow \begin{array}{l} x - y = a \\ y - z = b \\ -x + z = c \end{array}$

c)

c.1) No. Tomemos $(a,b,c) = (0,0,1)$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$|C| = 0$

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Rg\, C = 2.$

$$C^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rg\, C^* = 3$$

$\underset{\text{Rouché-Fröbenius}}{\Longrightarrow}$ El sistema es incompatible.

c.2) No. El sistema

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{C} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

es compatible al ser homogéneo pero, dado que $Rg\, C = 2$, admite infinitas soluciones.

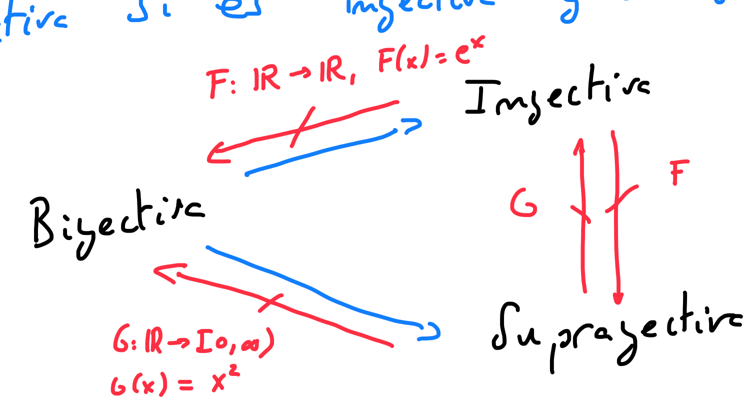
c.3) No, por el apartado c2.

d)

f es inyectiva si cumple que $f(x_1) = f(x_2)$ implica que $x_1 = x_2$.

$f: X \to Y$ es sobreyectiva si verifica que $\forall y \in Y, \exists x \in X$ tal que $f(x) = y$.

f biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva



e)

$f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente $\Rightarrow f$ es inyectiva $\Big\}$ f es biyectiva

$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \rightarrow f$ es sobreyectiva

g no es inyectiva (se desprende de la gráfica fácilmente) $\Rightarrow g$ no es biyectiva.

$g(\mathbb{R}) = [2 - 2\log 2, \infty) \neq \mathbb{R} \Rightarrow g$ no es sobreyectiva

Como consecuencia del apartado c), h no es inyectiva, ni suprayectiva ni biyectiva.

5)

a)

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3 + 7y = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 14y^3 + 7x = 0 \end{array}\right\} \quad 28y^3 + 21 - 49y = 0 \Rightarrow 4y^3 - 7y + 3 = 0$$

$$4y^3 - 7y + 3 = (y-1)(4y^2 + 4y - 3) = 4(y-1)(y - \tfrac{1}{2})(y + \tfrac{3}{2})$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 4 & 0 & -7 & 3 \\ 1 & & 4 & 4 & -3 \\ \hline & 4 & 4 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4\cdot(-3)}}{2\cdot 4} = \frac{-1 \pm 2}{2} \begin{array}{l} \nearrow \frac{1}{2} \\ \searrow -\frac{3}{2} \end{array}$$

Puntos críticos: $(-2, 1), \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right)$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 7 \qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 42y^2$

$$(-2,1): \left\{\begin{array}{l} 2 > 0 \\[1ex] \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 42 \end{vmatrix} = 35 > 0 \end{array}\right. \xrightarrow{\text{Sylvester}}$$

La matriz hessiana es def. positiva

$\Downarrow$

$(-2,1)$ es un mínimo local.

$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2>0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & \frac{21}{2} \end{vmatrix} = -28 < 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ La matriz hessiana es indefinida $\Rightarrow$ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ es un punto de silla

$\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right)$:

$$\left\{\begin{array}{l} 2>0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & \frac{189}{2} \end{vmatrix} = 140 > 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$ La matriz hessiana es def. positiva $\Rightarrow$ $\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right)$ es un mínimo local

b)

- f no alcanza su máximo global en $\mathbb{R}^2$, pues no está acotada superiormente ya que $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \infty$ (de hecho, $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = \infty$).
- Puesto que $\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = \infty$, sabemos de un teorema visto en clase que f alcanza su mínimo global en $\mathbb{R}^2$, y necesariamente debe ser uno de los mínimos locales.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2,1) = -\frac{1}{2} \\ f\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{891}{32} \end{array}\right\} \Rightarrow$$ f alcanza su mínimo global en $\left(\frac{27}{4}, -\frac{3}{2}\right)$.

c)

Es un cálculo directo que

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x^2 + \frac{7}{2}y^4 - 3x + 7xy \\
&= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}y\right)^2 - \left(-\frac{3}{2} + \frac{7}{2}y\right)^2 + \frac{7}{2}y^4 \\
&= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}y\right)^2 + \frac{7}{2}\left[y^4 - \left(-\frac{3\sqrt{14}}{14} + \frac{\sqrt{14}}{2}y\right)^2\right] \\
&= \left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}y\right)^2 + \frac{7}{2}\left(y^2 - \frac{\sqrt{14}}{2}y + \frac{3\sqrt{14}}{14}\right)\left(y^2 + \frac{\sqrt{14}}{2}y - \frac{3\sqrt{14}}{14}\right) \\
&= \underbrace{\left(x - \frac{3}{2} + \frac{7}{2}y\right)^2}_{\geq 0} + \frac{7}{2}\underbrace{\left[\left(y - \frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} + \frac{3\sqrt{14}}{14}\right]\left[\left(y + \frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{14}}{14}\right]}_{\text{Únicamente depende de } y.}
\end{aligned}
$$

$= F(y)$, que es un polinomio

Si $\|(x,y)\| \longrightarrow \infty$, diferenciamos dos casos:

- Si $|y| \to \infty$, tenemos que

$$f(x,y) \geq \frac{7}{2}\left[\left(y - \frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} + \frac{3\sqrt{14}}{14}\right]\left[\left(y + \frac{\sqrt{14}}{4}\right)^2 - \frac{7}{8} - \frac{3\sqrt{14}}{14}\right] \xrightarrow[|y|\to\infty]{} +\infty.$$

- Por otro lado, si $|y|$ está acotado, necesariamente $|x| \to \infty$ y así

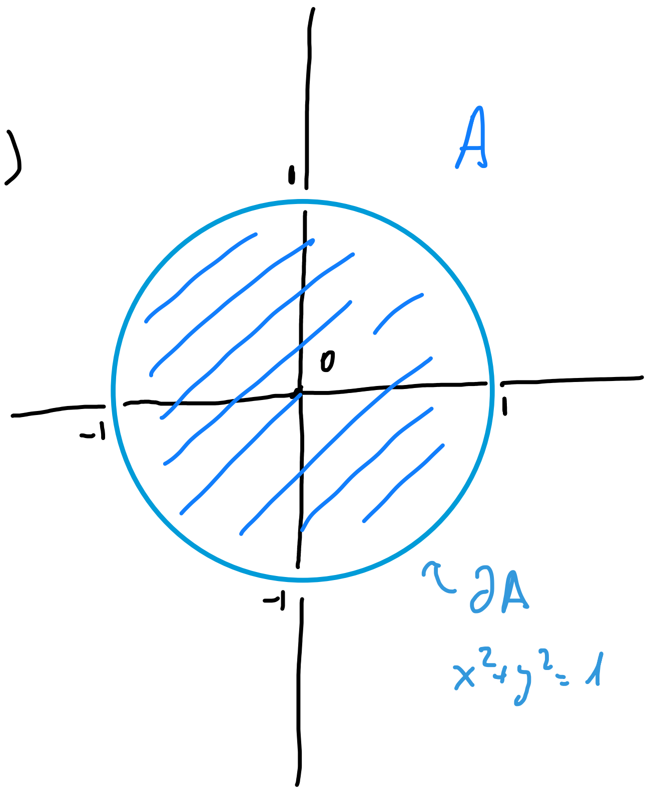
$$f(x,y) = \left(x - \underbrace{\frac{3}{2} + \frac{7}{2}y}\right)^2 + \underbrace{F(y)} \xrightarrow[|x|\to\infty]{} +\infty.$$

Acotados porque son continuas y además $|y|$ está acotado

Es decir, $\displaystyle\lim_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = +\infty.$

6)

a)



- A no es abierto.
- A es cerrado, pues $\partial A \subset A$.
- A es acotado, pues si $(x,y) \in A$,

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \leq 1.$$

- A es compacto, pues es cerrado y acotado.

b) Puesto que A es compacto y f es continua, alcanza sus extremos absolutos en A.

- En el interior de A: $x^2+y^2<1$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x+\sqrt{3}y = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{3}x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = x = y \Rightarrow$$

$(0,0)$ es el único punto crítico en el interior de A.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sqrt{3} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 2>0 \\ \begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 \end{vmatrix} = -3 < 0 \end{array} \longrightarrow$$

La matriz hessiana es indefinida $\Rightarrow$ $(0,0)$ es punto de silla

Por tanto, los extremos de f deben alcanzarse en la frontera: $x^2+y^2=1$. $\quad g(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda(x^2+y^2-1)$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x} &= 2x + \sqrt{3}\,y - 2\lambda x = 0 \\
\frac{\partial g}{\partial y} &= \sqrt{3}\,x - 2\lambda y = 0 \\
\frac{\partial g}{\partial \lambda} &= x^2+y^2-1 = 0
\end{aligned}\right\}
\begin{aligned}
&\Longrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{3}\,y\left[4\lambda^2-4\lambda-3\right]=0 \overset{y\neq 0}{\Longrightarrow} \lambda = \frac{4\pm\sqrt{4^2+4\cdot 4\cdot 3}}{2\cdot 4} = \frac{1\pm 2}{2} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{cases} \\
&\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}\lambda y
\end{aligned}$$

- Si $\lambda = \frac{3}{2}$, $\quad x = \sqrt{3}\,y$

$3y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

- Si $\lambda = -\frac{1}{2}$, $\quad x = -\frac{\sqrt{3}}{3}\,y$

$\frac{1}{3}y^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow x = \mp\frac{1}{2} \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

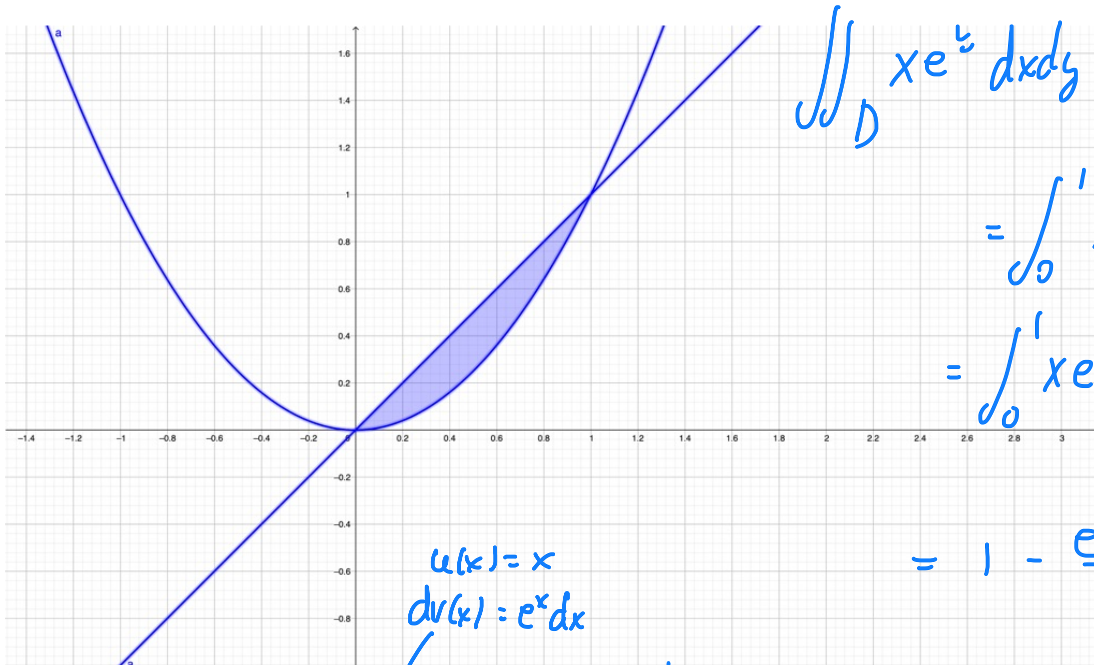
Como f debe alcanzar sus extremos en la frontera:

$$\left.\begin{aligned}
f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) &= \frac{3}{2} = f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right) \\
f\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) &= -\frac{1}{2} = f\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)
\end{aligned}\right\}$$

- f alcanza su máximo absoluto en $\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- f alcanza su mínimo absoluto en $\pm\left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7)

a)



$$\iint_D x e^y \, dx dy = \int_0^1 x \int_{x^2}^{x} e^y \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 x \left[e^x - e^{x^2} \right] dx$$

$$= \int_0^1 x e^x \, dx - \int_0^1 x e^{x^2} dx$$

$$= 1 - \frac{e-1}{2} = \frac{3-e}{2}$$

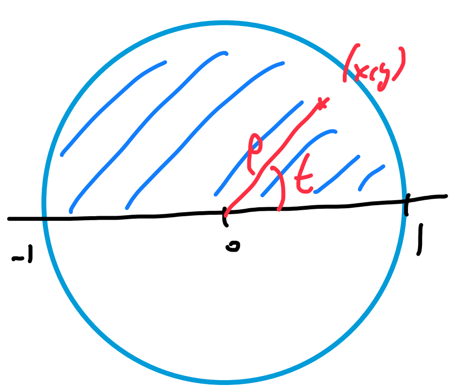
$u(x) = x$

$dv(x) = e^x dx$

$$\int_0^1 x e^x \, dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1$$

$$\int_0^1 x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} \Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}$$

b)



Usando coordenadas polares:

$x = \rho \cos t$ $\quad$ $\rho \in [0,1]$, $t \in [0, \pi]$

$y = \rho \operatorname{sen} t$

$$\iint_B (x^2+y^2)^{2019} \, dx dy \overset{\text{Polares}}{=} \int_0^{\pi} \int_0^1 \rho^{2 \cdot 2019} \cdot \rho \, d\rho \, dt$$

$$= \pi \frac{1}{4040} \rho^{4040} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4040}$$